

Карагандинский национальный исследовательский университет имени
академика Е.А. Букетова

УДК 517.95

На правах рукописи

ОМАРОВ МАДИ ТУЛЕГЕНОВИЧ

Диффузионно-волновые уравнения в неканонических областях

8D05401 – Математика

**Диссертация, подготовленная на соискание степени доктора философии
(PhD)**

Отечественные научные консультанты:

доктор физико-математических наук,
профессор

Рамазанов М.И.

доктор физико-математических наук,
профессор

Дженалиев М.Т.

Зарубежный научный консультант:

доктор физико-математических наук,
профессор

Псху А.В.

(Россия)

**Республика Казахстан
Караганда, 2026**

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ.....	13
1.1 Обобщенные и специальные функции.....	13
1.2 Дробные операторы	23
1.3 Некоторые сведения из теории дробных дифференциальных уравнений....	33
2 РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ РИМАНА ЛИУВИЛЛЯ	38
2.1 Решение обыкновенного дифференциального уравнения с дробной производной Лиувилля	38
2.2 Функция Грина для оператора диффузии с началом в бесконечности	48
2.3 Функция Грина для оператора диффузии с переменным началом.....	51
3 СУБДИФФУЗИОННЫЕ И ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ В СУЖАЮЩИХСЯ И РАСШИРЯЮЩИХСЯ ОБЛАСТЯХ	65
3.1 Краевая задача для уравнения дробной диффузии с бесконечной памятью в сужающейся нецилиндрической области	65
3.2 Краевая задача Дирихле для дробного диффузионного уравнения с правосторонней производной Лиувилля в вырожденной угловой области	79
3.3 Диффузионно-волновая краевая задача.....	90
4 ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ЯДРОМ РАЙТА.....	126
4.1 Преобразование Станковича	126
4.2 Скалярные однородное и неоднородное уравнения.....	128
4.3 Уравнение с положительным самосопряжённым оператором.....	129
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	137
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	140

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена исследованию краевых задач для дробно-диффузионных и диффузионно-волновых уравнений в неканонических областях. Изучаются уравнения с дробными производными Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто, в вырождающихся областях с подвижными, сужающимися, расширяющимися границами. То что геометрия области меняется во времени, и в начальный момент область решения вырождается в точку, это оказывает влияние на постановку задач и свойства их решений.

В работе построены фундаментальные решения и функции Грина для соответствующих дробных операторов, получены интегральные представления решений, разработан метод дробно-диффузионных потенциалов, а также исходные краевые задачи сведены к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода со слабой либо сингулярной особенностью. Также в работе исследуются функции Грина для дробных операторов на полуоси, в полуплоскости и угловых областях, изучаются субдиффузионные и диффузионно-волновые задачи в сужающихся и расширяющихся областях, а также рассматриваются интегральные преобразования с ядром Райта.

В диссертации используются методы дробного исчисления, теория специальных функций, в частности функций Миттаг–Леффлера и Райта, методы функций Грина, интегральных преобразований и интегральных уравнений. Существенное место в работе занимают вопросы существования и единственности регулярных и обобщённых решений, исследование граничных следов, а также изучение разрешимости возникающих интегральных уравнений в подходящих функциональных пространствах. Полученные результаты направлены на развитие аналитического аппарата для исследования процессов диффузионного и диффузионно-волнового типа в областях сложной геометрии. Работа носит теоретический характер и относится к теории дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка, дробному анализу и математической физике.

Актуальность исследования

Классический фундамент исследования образуют труды по параболическим уравнениям и задачам с изменяющейся геометрией области. Уже работа М. Жевре [1] заложила основу аналитического исследования уравнений параболического типа; затем общая теория была систематизирована А. Фридманом [2], задачи со свободной и движущейся границей подробно исследованы Дж. Крэнком [3], а одномерная теория теплопроводности и краевых задач — Дж. Р. Кэнноном [4]. Вместе с тем переход к областям переменной геометрии естественно усиливает роль интегрально-операторных методов. В этом отношении принципиальное значение имеют статья Г. Х. Харди и Э. К. Титчмарша «An integral equation» [5], монография Ф. Г. Трикоми [6], фундаментальный труд Грипенберга, Лондена и Стаффанса [7], монография Т.

А. Бёртона [8], а также исследования уравнения Вольтерра со степенной нелинейностью [9].

При исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка существенную роль играют работы А. Н. Герасимова [10] и М. Капуто [11], а также исследования М. М. Джрбашяна [12]. Систематическое изложение теории дробных интегралов и производных, а затем и дробных дифференциальных уравнений дано в монографиях С. Г. Самко, А. А. Килбаса и О. И. Маричева [13], И. Подлубного [14], А. А. Килбаса, Х. М. Сриваставы и Х. Х. Трухильо [15], К. Дитхельма [16], а также в коллективной книге под редакцией Р. Хильфера [17]. Физико-математическая мотивация этих исследований связана с моделированием процессов с памятью, наследственностью и аномальным переносом; в этом направлении нужно отметить работы Р. Р. Нигматуллина [18], Р. Метцлера и Дж. Клафтера [19], [20]. Эти работы содействовали тому, что дробные уравнения явились естественным средством описания медленных диффузионных и релаксационных процессов.

Для аналитического исследования дробно-диффузионных и диффузионно-волновых уравнений решающую роль играет аппарат специальных функций, прежде всего функций Райта и Миттаг–Леффлера. Его истоки восходят к работам Э. М. Райта [21]–[25]. Позднее свойства функции Райта, её связь с фундаментальными решениями уравнений дробного порядка и её масштабная инвариантность были подробно исследованы Р. Горенфлю, Ю. Лучко и Ф. Майнарди [26], [27]. Важное значение имеют также результаты Ф. Майнарди о фундаментальных решениях дробного диффузионно-волнового уравнения [28] и его монографическое изложение теории волн и релаксации в средах с памятью [29].

Собственно теория дробно-диффузионных и диффузионно-волновых уравнений развивалась от первых моделей дробной диффузии и соответствующих фундаментальных решений [30]–[34] к краевым задачам в ограниченных областях, принципам максимума и начально-краевым постановкам [35]–[38]. Работы В. Вайсса [30], В. Р. Шнайдера и В. Вайсса [31], А. Н. Кочубея [32], [33], С. Д. Эйдельмана и А. Н. Кочубея [34] показали, что дробный порядок по времени не является лишь формальной модификацией классического уравнения теплопроводности, а приводит к иной структуре фундаментального решения и к новым вопросам существования. Далее О. П. Агравал [35], Ю. Лучко [36], [38], К. Сакамото и М. Ямамото [37] исследовали краевые и начально-краевые задачи, установили результаты о существовании, единственности и свойствах решений. Однако именно для неканонических и нецилиндрических областей эта теория разработана значительно меньше.

Отметим также работы А. В. Псху, в которых получены: решение краевой задачи для дробного уравнения [39–41], построение решений методом функции Грина [42], монография по уравнениям в частных производных дробного порядка [43], фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка [44], а также первая краевая задача в нецилиндрической области [45]. Особое место занимает работа о функциях Грина для многомерных

областей [46], поскольку она напрямую соотносится с тематикой диссертации, где центральными объектами являются именно функции Грина и интегральные представления в областях сложной геометрии.

Также отметим работы Федорова В. Е., Гордиевского Д. М. об операторах вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени [47], А. В. Псху, М. И. Рамазанова, Н. К. Гульманова и С. А. Искакова, посвященные краевым задачам в неканонических областях [48-50].

Актуальность диссертационного исследования определяется необходимостью дальнейшего развития теории краевых задач для дробно-диффузионных и диффузионно-волновых уравнений в неканонических областях. Наиболее существенными здесь являются три взаимосвязанных обстоятельства: нелокальный по времени характер дробных операторов, сложная геометрия области решения и возникающая при этом необходимость в построении новых функций Грина, дробно-диффузионных потенциалов и исследовании сингулярных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Именно эта совокупность вопросов и составляет основное содержание диссертационной работы.

Цель работы.

Целью диссертационной работы является развитие аналитических методов исследования дробно-диффузионных и диффузионно-волновых уравнений в неканонических областях на основе построения фундаментальных решений и функций Грина для дробных операторов Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто, получения явных интегральных представлений решений, сведения начально-краевых задач к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода, а также установления условий существования и единственности регулярных, классических и обобщённых решений в вырождающихся областях с подвижными, сужающимися, расширяющимися границами.

Задачи исследования:

1. Систематизировать и уточнить вспомогательный аппарат, необходимый для исследования рассматриваемых задач, включая свойства обобщённых функций, функций Миттаг–Леффлера и Райта, а также дробных операторов Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто.

2. Получить интегральное представление решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения с правосторонней дробной производной Лиувилля и исследовать вопросы существования и единственности регулярного решения.

3. Построить фундаментальные решения и функции Грина для дробных операторов Римана–Лиувилля в модельных областях, в частности на полуоси, в полуплоскости и в областях, допускающих приведение к каноническому виду заменой переменных.

4. Исследовать краевую задачу для уравнения дробной диффузии с бесконечной памятью в сужающейся нецилиндрической области, получить явную интегральную формулу регулярного решения и свести задачу к

интегральному уравнению Вольтерра второго рода для неизвестной граничной плотности.

5. Исследовать задачу Дирихле для дробного диффузионного уравнения с правосторонней производной Лиувилля в угловой области, установить формулы скачка соответствующего потенциала и доказать однозначную разрешимость возникающего интегрального уравнения Вольтерра.

6. Разработать весовую функциональную схему исследования диффузионно-волновой краевой задачи в области с подвижной диагональной границей, установить условия на параметры весов, доказать теоремы единственности и существования классических и обобщённых решений и построить функцию Грина исследуемой задачи.

7. Исследовать интегральные преобразования с ядром Райта, получить коммутационные формулы для преобразования Станковича и правостороннего оператора Римана–Лиувилля, а также установить критерий существования экспоненциальных решений соответствующего дробного уравнения.

Общие методы исследования.

В диссертационной работе использованы методы дробного исчисления, теория обобщённых функций, методы теории уравнений в частных производных и интегральных уравнений. При построении решений применяются функции Грина, фундаментальные решения, дробно-диффузионные потенциалы, метод отражений, замены переменных, приводящие область к более удобному виду, а также методы интегральных преобразований, включая преобразования Лапласа, синус-преобразование и преобразование Станковича. Существенную роль играют специальные функции, прежде всего функции Миттаг–Леффлера и Райта, а также ядра типа Шилова–Гельфанда. Для исследования разрешимости краевых задач используются методы сведения к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода со слабой или сингулярной особенностью, метод последовательных приближений, оценки интегральных операторов, а также методы функционального анализа, включая работу во взвешенных пространствах, доказательство компактности вложений и энергетические тождества. Доказательство существования построенных решений основано на прямой подстановке в исходные уравнения и граничные условия, а также на предельных переходах, обоснованных условиями сходимости соответствующих интегралов.

Научная новизна.

В диссертационной работе получены новые результаты по теории дробно-диффузионных и диффузионно-волновых уравнений в неканонических областях.

1. Найдено решение дифференциального уравнения с правосторонней дробной производной Лиувилля, построенное методом функции Грина; установлены условия существования и единственности регулярного решения.

2. Построены фундаментальные решения и функции Грина для ряда дробных операторов Римана–Лиувилля в модельных областях; найдены решения соответствующих краевых задач.

3. Для уравнения дробной диффузии с бесконечной памятью в сужающейся нецилиндрической области получена явная формула регулярного решения и доказано, что задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно неизвестной граничной плотности.

4. Для задачи Дирихле в вырожденной угловой области получено представление решения через дробные потенциалы, выведена формула скачка дробного потенциала двойного слоя и доказана однозначная разрешимость соответствующего интегрального уравнения Вольтерра.

5. Для диффузионно-волновой краевой задачи в области с подвижной диагональной границей разработан весовой подход, позволяющий установить условия на параметры весов, доказать компактность соответствующего вложения, построена функция Грина и доказаны теоремы единственности и существования классических и обобщённых решений.

6. Исследованы интегральные преобразования с ядром Райта; установлены коммутационные соотношения для преобразования Станковича и правостороннего оператора Римана–Лиувилля, а также получен секторный критерий существования и структура экспоненциальных решений соответствующего дробного уравнения.

Теоретическая и практическая значимость исследования.

Теоретическая значимость диссертационной работы состоит в дальнейшем развитии теории дробных дифференциальных уравнений и краевых задач для уравнений математической физики в неканонических областях. Полученные результаты расширяют метод функций Грина для уравнений с дробными производными по времени, уточняют связь между краевыми задачами и интегральными уравнениями Вольтерра второго рода, а также развивают аналитический аппарат исследования задач в вырождающихся областях с подвижными границами. Существенное теоретическое значение имеет разработка весового подхода к диффузионно-волновым задачам в областях с диагональной подвижной границей, а также исследование интегральных преобразований с ядром Райта для правосторонних дробных операторов.

Практическая значимость работы заключается в том, что построенные функции Грина, явные интегральные формулы решений, полученные оценки и критерии разрешимости могут быть использованы при исследовании прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, при разработке вычислительных методов для задач с памятью и подвижными границами, а также при математическом моделировании процессов аномальной диффузии, релаксации и переноса в средах со сложной геометрией. Результаты диссертации могут быть использованы в научно-исследовательской работе, а также при подготовке специальных курсов по дробному исчислению, уравнениям математической физики и интегральным уравнениям.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Решение линейного дифференциального уравнения с правосторонней дробной производной Лиувилля и теоремы существования и единственности регулярного решения.

2. Построение фундаментальных решений и функций Грина для дробных операторов Римана–Лиувилля в модельных областях, а также соответствующие интегральные представления решений краевых задач.

3. Существование регулярного решения краевой задачи для уравнения дробной диффузии с бесконечной памятью в сужающейся нецилиндрической области и сведение задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

4. Существование и единственность решения задачи Дирихле для дробного диффузионного уравнения в вырожденной угловой области, формула скачка дробного потенциала двойного слоя, однозначная разрешимость соответствующего интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

5. Весовая функциональная постановка диффузионно-волновой краевой задачи в области с подвижной диагональной границей, функция Грина задачи, теоремы существования и единственности классических и обобщённых решений.

6. Коммутационные формулы для преобразования Станковича и правостороннего оператора Римана–Лиувилля, а также секторный критерий существования экспоненциальных решений дробного уравнения с правосторонней производной.

Достоверность и обоснованность проведённых исследований.

Достоверность и обоснованность полученных в диссертации результатов обеспечиваются строгой математической постановкой рассматриваемых задач, использованием апробированных методов дробного исчисления, теории специальных функций, теории интегральных преобразований и интегральных уравнений, а также полнотой и логической завершённостью доказательств. Все основные результаты получены аналитически и сопровождаются последовательным обоснованием допустимости используемых преобразований, включая перестановку интегрирования и дифференцирования, предельные переходы и исследование сходимости интегралов. Построенные функции Грина и интегральные представления решений проверяются непосредственной подстановкой в исходные уравнения с учетом граничных условий. Теоремы единственности опираются на энергетические тождества, свойства соответствующих функциональных классов и однозначную разрешимость интегральных уравнений Вольтерра. Теоремы существования имеют конструктивный характер и основаны на явных формулах, потенциалах и последовательных приближениях. Дополнительным подтверждением достоверности служит согласованность полученных результатов с известными положениями общей теории дробных уравнений и их естественными предельными случаями.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [49-53], входящих в базы данных Web of Science Core Collection и Scopus.

1. Omarov M.T., A.V. Pskhu, Ramazanov M.I. The first boundary value problem for the fractional diffusion equation in a degenerate angular domain. Вестник

Карагандинского университета. – Серия «Математика». – 2024. – № 1(113). – С. 162-173. <https://doi.org/10.31489/2024M1/162-173>, (Q2).

2. Ramazanov, M.I., Gulmanov, N.K., Kопbalina, S.S., Omarov M.T. Solution of a Singular Integral Equation of Volterra Type of the Second Kind. Lobachevskii J Math 45, 5898–5906 (2024). <https://doi.org/10.1134/S1995080224606830>, (Q2).

3. Ramazanov M.I., Gulmanov N.K., Omarov M.T. On Solving a Singular Volterra Integral Equation. Filomat 39:11 (2025), 3647–3656. <https://doi.org/10.2298/FIL2511647R>, (Q2).

4. A.D. Akhmetshin, M.T. Omarov, R.Z. Toleukhanova. A Boundary Value Problem for a Time-Fractional Diffusion Equation in a Non-Cylindrical Shrinking Domain. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, No. 1(121), 2026, pp. 37–54. <https://doi.org/10.31489/2026M1/37-54>, (Q2).

5. M. T. Omarov, M. I. Ramazanov. Boundary Value Problem for the Fractional Diffusion Equation with the Right-Sided Liouville Operator in a Triangular Domain. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2026, Vol. 47, No. 2, pp. 625–635, (Q2)

Тезисы:

1. Omarov M.T., A.V. Pskhu, Ramazanov M.I. Начальная граничная задача для уравнения дробной диффузии в вырождающейся угловой области. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан. Сборник тезисов. Алматы: Институт математики и математического моделирования. – 2024. – С. 177;

2. Омаров М.Т., Псху А.В. Рамазанов М.И. The initial boundary value problem for fractional diffusion equations within a degenerate angular domain. Международная Научная Конференция «Математика В Созвездии Наук», посвященная 85-летию со дня рождения академика РАН Виктора Антоновича Садовниченко;

3. Гульманов Н.К., Омаров М.Т., Танин А.О. Решение Сингулярного Интегрального Уравнения Типа Вольтерры Задач Теплопроводности. International Scientific Conference Actual Problems Of Applied Mathematics And Information Technologies - Al-Khwarizmi 2024;

4. Рамазанов М.И., Гульманов Н. К., Омаров М. Т. О параболических задачах в вырождающихся областях. Международной научной конференции «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы современного анализа» 11–14 марта 2025 года, Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, Россия;

5. Омаров М.Т., Рамазанов М. И., Танин А. О., Шаяхметова Б. К. - Применение Нейронных Сетей Для Решения Обратных Задач, Связанных С Дробными Дифференциальными Уравнениями. Сборник Докладов Евразийской Международной Научной Конференций «Искусственный Интеллект И Обратные Задачи В Науке, Технике И Индустрии» 14–16 апрель 2025 год;

6. М.Т. Омаров, А.В. Псху, М.И. Рамазанов. Решение краевой задачи для уравнения дробной диффузии с правосторонним оператором Лиувилля в треугольной области. Традиционная международная апрельская математическая

конференция в честь Дня науки Республики Казахстан. Сборник тезисов .- Алматы: Институт математики и математического моделирования, 2025. - 301 с;

7. Гульманов Н.К., Омаров М.Т., Танин А.О. Решение Сингулярного Интегрального Уравнения Типа Вольтерры Задач Теплопроводности. Фундаментальная наука и приоритеты XXI века: материалы международной научно-практической конференции (29 ноября 2024 г.) – Астана: Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, 2025. – 747 с;

8. М.Т. Omarov, A.V. Pskhu, M.I. Ramazanov. On A Linear Differential Equation With A Right-Sided Liouville-Weyl Fractional Derivative. Международная Конференция «Актуальные Проблемы Анализа, Дифференциальных Уравнений И Алгебры» (EMJ-2025);

9. Омаров М.Т., Псху А.В., Рамазанов М.И. Дробная диффузия с правосторонней производной Лиувилля: краевая задача в треугольной области. International Conference on Mathematics, Mechanics, Information Technologies, and Artificial Intelligence (ICMM&IT 2025). September 24-26, 2025. Almaty, Kazakhstan;

10. Omarov M.T. Boundary value problem for the fractional diffusion equation with a right-sided Liouville operator in a triangular domain. 15th ISAAC Congress July 21 – July 25, 2025. Venue: Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan;

11. М.И. Рамазанов, М.Т. Омаров. Краевые задачи для уравнения теплопроводности в вырождающихся областях и уравнения Вольтерра. XVII Международная Казанская школа-конференция ”Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”. (Казань, 23 – 28 августа 2025 г.);

12. Omarov M.T, Ramazanov M. A boundary value problem for a time-fractional diffusion equation in a non-cylindrical shrinking domain. International Scientific Conference “Trends in Analysis and Differential Equations”. Dedicated to the 65th Anniversary of Professor Batirkhan Turmetov. Turkistan.

Апробация полученных результатов.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на вышеуказанных конференциях и семинарах.

Вклад докторанта в подготовку каждой публикации.

В основных 5-и работах, написанных в соавторстве с научными консультантами и соавторами, научные консультанты сформулировали постановку задачи и определили методологию исследования, а докторант самостоятельно сформулировал основные и вспомогательные результаты и доказал их.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа объемом 144 страницы состоит из: введения, четырех разделов, заключения и списка использованной литературы. Нумерация математических утверждений (теорем, лемм, замечаний) и формул является трехзначной: первая цифра обозначает номер главы, вторая — номер раздела, третья — порядковый номер самого математического утверждения или формулы.

Краткое содержание работы.

Содержание диссертационной работы изложено в четырёх разделах.

В первом разделе приводятся предварительные сведения, необходимые для дальнейшего исследования. Рассматриваются обобщённые и специальные функции, используемые при построении фундаментальных решений и функций Грина, в частности функция Хевисайда, дельта-функция Дирака, функции Миттаг–Леффлера и функция Райта. Далее излагаются определения и основные свойства дробных интегралов и производных Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто, включая правосторонние операторы на полуоси. В заключительной части раздела рассматриваются начальные задачи для дробных дифференциальных уравнений, их сведение к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода, устанавливаются результаты о существовании, единственности и априорных оценках решений, а также приводятся некоторые положения, используемые в последующих главах.

Во втором разделе исследуются: обыкновенное дифференциальное уравнение с правосторонней дробной производной Лиувилля и функции Грина для соответствующих дробных операторов. В первом подразделе методом функции Грина строится интегральное представление решения линейного уравнения с дробной производной Лиувилля и доказываются утверждения о существовании и единственности регулярного решения. Во втором подразделе строится фундаментальное решение дробного оператора в модельной области типа четверти; при этом используется синус-преобразование Фурье и получаются явные представления решения через функцию Райта. В третьем подразделе исследуется функция Грина для дробного оператора в угловой области вида $\{(x, t): x > 0, t > x\}$; с помощью замены переменных область приводится к первой четверти, после чего строится явная формула функции Грина и найдено решение соответствующей краевой задачи.

Третий подраздел посвящен субдиффузионным и диффузионно-волновым уравнениям в сужающихся, расширяющихся вырождающихся областях. В первом подразделе рассматривается краевая задача для уравнения дробной диффузии с бесконечной памятью в сужающейся нецилиндрической области. Задача сводится к задаче с однородными граничными условиями, строятся фундаментальное решение и функция Грина на полуоси, вводятся дробные: объёмный потенциал, потенциалы простого и двойного слоя, после чего решение представляется в интегральной форме. Для неизвестной граничной плотности получено интегральное уравнение Вольтерра второго рода, на основе которого доказываются существование и единственность регулярного решения.

Во втором подразделе третьего раздела исследуется краевая задача Дирихле для дробного диффузионного уравнения с правосторонней производной Лиувилля в вырожденной угловой области. Получено представление решения через специальные дробные потенциалы, устанавливается формула скачка потенциала двойного слоя и проводится сведение исходной задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Доказывается существование и единственность решения, а также

обосновывается возможность нахождения решения методом последовательных приближений.

В третьем подразделе рассматривается диффузионно-волновая краевая задача в области с подвижной диагональной границей. Для её исследования вводятся весовые функциональные пространства и устанавливаются условия на параметры весов, обеспечивающие существование постановки. Исследуется структура решений однородного уравнения, доказываемся дробно-параболический характер рассматриваемого оператора, обосновываются необходимые вложения и энергетические оценки. Далее строится функция Грина вспомогательной полуплоскости, вводится диагональный потенциал, после чего получается полная функция Грина исследуемой задачи. В заключительной части раздела доказываются теоремы единственности и существования классических и обобщённых решений.

В четвёртой главе исследуются интегральные преобразования с ядром Райта. Рассматривается уравнение с правосторонней производной Римана–Лиувилля и изучается преобразование Станковича в соответствующих функциональных классах. Получаются коммутационные формулы для преобразования Станковича и правостороннего дробного оператора, устанавливаются условия существования преобразований и выводятся представления решений. Кроме того, исследуется структура экспоненциальных решений и формулируется секторный критерий их существования.

Благодарности.

Автор диссертации выражает благодарность отечественным научным консультантам: — доктору физико-математических наук, профессору Рамазанову Мурату Ибраевичу, — доктору физико-математических наук, профессору Дженалиеву Мувашархану Танабаевичу — за постоянную поддержку и внимание.

Также выражаю благодарность доктору физико-математических наук, профессору Псху Арсену Владимировичу за ценные рекомендации, которые существенно повлияли на качество работы. Выражаю признательность за всестороннюю поддержку, оказанную в период научной стажировки в городе Нальчик.

1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 Обобщенные и специальные функции

В данном разделе приведены определения и базовые факты о специальных и обобщенных функциях, которые используются при построении фундаментальных решений и функций Грина. Рассматриваются функция Хевисайда, дельта-функция Дирака, функции Миттаг-Леффлера, а также функция Райта.

Функция Хевисайда

Функция Хевисайда $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ определяется равенством [54]

$$H(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s \leq 0 \end{cases}. \quad (1.1.1)$$

Функция H является кусочно-заданной. Сдвиг $H(s - s_0)$ совпадает с индикаторной функцией полуоси $(s_0, +\infty)$:

$$H(s - s_0) = \mathbf{1}_{(s_0, +\infty)}(s). \quad (1.1.2)$$

Соответственно, для любой интегрируемой функции f на \mathbb{R} справедливо

$$\int_{\mathbb{R}} H(s - s_0) f(s) ds = \int_{s_0}^{+\infty} f(s) ds. \quad (1.1.3)$$

Хотя H не является гладкой функцией, она задаёт регулярную обобщённую функцию на \mathbb{R} : для любой тестовой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ положим

$$\langle H, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} H(s) \varphi(s) ds = \int_0^{+\infty} \varphi(s) ds. \quad (1.1.4)$$

Обобщенная производная H' определяется: $\langle H', \varphi \rangle := -\langle H, \varphi' \rangle$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Интегрируя по частям в (1.1.4) и используя компактность носителя φ , получаем $\langle H', \varphi \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(s) ds = \varphi(0)$. Следовательно,

$$H' = \delta \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (1.1.5)$$

где δ - дельта-функция Дирака, являющаяся сингулярной обобщённой функцией. Аналогично, для сдвига:

$$\frac{d}{ds} H(s - s_0) = \delta(s - s_0) \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (1.1.6)$$

Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$ (достаточно $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R})$) и $s_0 \in \mathbb{R}$. Тогда произведение $H(s - s_0)f(s)$ является обобщенной функцией. Ее производная вычисляется по формуле

$$\frac{d}{ds}(H(s - s_0)f(s)) = H(s - s_0)f'(s) + f(s_0)\delta(s - s_0), \quad (1.1.7)$$

которая является правилом Лейбница с учётом скачка и доказывается прямой проверкой на тестовых функциях:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{ds}(Hf), \varphi \right\rangle &= -\langle Hf, \varphi' \rangle = -\int_{s_0}^{+\infty} f(s)\varphi'(s)ds \\ &= \int_{s_0}^{+\infty} f'(s)\varphi(s)ds + f(s_0)\varphi(s_0). \end{aligned}$$

Дельта-функция Дирака

Дельта-функция Дирака δ есть сингулярная обобщенная функция на \mathbb{R} , заданная действием на тестовые функции [54]:

$$\langle \delta, \varphi \rangle := \varphi(0), \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (1.1.8)$$

Иначе говоря, δ является линейным непрерывным функционалом на $C_0^\infty(\mathbb{R})$ (в стандартной топологии), локализирующим значение тестовой функции в одной точке.

Сдвинутая дельта-функция $\delta(\cdot - s_0)$ (часто обозначаемая δ_{s_0}) определяется равенством

$$\langle \delta(\cdot - s_0), \varphi \rangle := \varphi(s_0), \quad s_0 \in \mathbb{R}. \quad (1.1.9)$$

Для достаточно регулярной функции f (например, непрерывной) и $s_0 \in \mathbb{R}$ имеет место тождество

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)\delta(s - s_0)ds = f(s_0), \quad (1.1.10)$$

которое следует из (1.1.9) при интерпретации интеграла как действия обобщенной на тестовую функцию. Аналогично, для интегрирования по промежутку: если f непрерывна и $\alpha < \beta$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(s)\delta(s - s_0)ds = \begin{cases} f(s_0), & \alpha < s_0 < \beta \\ 0, & s_0 < \alpha \text{ или } s_0 > \beta \end{cases}. \quad (1.1.11)$$

Случаи $s_0 = \alpha$ или $s_0 = \beta$ зависят от принятого соглашения о включении граничных точек в промежуток интегрирования; в прикладных задачах этот выбор обычно не имеет значения, так как точка является множеством меры нуль. Единая запись, исключая необходимость отдельного рассмотрения границ, выражается через функцию H :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(s)\delta(s - s_0)ds = f(s_0)H(s_0 - \alpha)H(\beta - s_0) \text{ при } \alpha \neq s_0, \beta \neq s_0. \quad (1.1.12)$$

Производные $\delta^{(n)}$ определяются в смысле обобщенных функций:

$$\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle := (-1)^n \varphi^{(n)}(0), n \in \mathbb{N}, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (1.1.13)$$

В частности, $\delta' = \frac{d}{ds} \delta$ удовлетворяет $\langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0)$.

Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда выполняется масштабное тождество

$$\delta(as) = \frac{1}{|a|} \delta(s) \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad (1.1.14)$$

то есть для любой $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ имеем

$$\langle \delta(a \cdot), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta(as)\varphi(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \delta(u)\varphi\left(\frac{u}{a}\right)\frac{du}{|a|} = \frac{1}{|a|} \varphi(0).$$

Более общий и часто используемый факт: пусть $g \in C^1(\mathbb{R})$ имеет конечное число простых нулей s_1, \dots, s_m (то есть $g(s_j) = 0$ и $g'(s_j) \neq 0$). Тогда справедлива формула композиции

$$\delta(g(s)) = \sum_{j=1}^m \frac{\delta(s - s_j)}{|g'(s_j)|} \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (1.1.15)$$

Её существование проверяется подстановкой (1.1.15) в действие на тестовые функции и применением стандартной формулы замены переменной в окрестности корня.

В задачах на \mathbb{R}^n дельта-функция $\delta(x)$ понимается как обобщенная функция, действующее по правилу $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Для независимых переменных x и t произведение $\delta(x - \xi)\delta(t - \tau)$ следует понимать как тензорное произведение обобщенных функций, определённое на $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$: $\langle \delta(x - \xi)\delta(t - \tau), \varphi(x, t) \rangle = \varphi(\xi, \tau)$.

Функция Миттаг-Леффлера

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\Re\alpha > 0$. Двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ определяется степенным рядом [55-60]

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, z \in \mathbb{C}. \quad (1.1.16)$$

Однопараметрическая функция Миттаг-Леффлера задаётся частным случаем

$$E_{\alpha}(z) := E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (1.1.17)$$

Из асимптотики гамма-функции, задаваемой формулой Стирлинга, следует, что ряд (1.1.16) имеет бесконечный радиус сходимости. Таким образом, при любом фиксированном $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\Re\alpha > 0$ функция $E_{\alpha,\beta}(z)$ является целой функцией переменного z . Из определения (1.1.16) непосредственно получаем значение в нуле:

$$E_{\alpha,\beta}(0) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}. \quad (1.1.18)$$

В частности, $E_{\alpha}(0) = 1$.

При $\alpha = 1$ имеем $\Gamma(k + 1) = k!$, поэтому

$$E_1(z) = E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (1.1.19)$$

Из (1.1.16) выводится рекуррентное тождество:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\beta+\alpha}(z). \quad (1.1.20)$$

Действительно,

$$zE_{\alpha,\beta+\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{\Gamma(\alpha k + \beta + \alpha)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = E_{\alpha,\beta}(z) - \frac{1}{\Gamma(\beta)}.$$

Ключевыми в приложениях являются производные не самой $E_{\alpha,\beta}$, а комбинаций вида $z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda z^{\alpha})$. Пусть $\Re\alpha > 0, \beta \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C}$ и $z \neq 0$. Тогда формально дифференцируя почленно ряд и используя функциональное

уравнение гамма-функции $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$, получаем строгое тождество, для подходящей ветви z^α при комплексных z

$$\frac{d}{dz} \left(z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha) \right) = z^{\beta-2} E_{\alpha,\beta-1}(\lambda z^\alpha). \quad (1.1.21)$$

Аналогично, справедлива интегральная формула

$$\int z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha) dz = z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha) + C \quad (1.1.22)$$

которая следует из (1.1.21) при замене $\beta \mapsto \beta + 1$.

Замечание 1.1.1. При вещественных $z > 0$ ветвь z^α берётся стандартно, и формулы (1.1.21)-(1.1.22) не содержат неоднозначностей.

Из степенного ряда непосредственно следует, что при $z \rightarrow 0$ в комплексной плоскости

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \frac{z}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha+\beta)} + O(z^2). \quad (1.1.23)$$

В дальнейшем будет использоваться частный случай этой формулы: если $\lambda \in \mathbb{C}$ фиксировано, $\alpha > 0$ и $s \rightarrow 0+$, то $z = -\lambda s^\alpha \rightarrow 0$, поэтому $E_{\alpha,\beta}(-\lambda s^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} - \frac{\lambda s^\alpha}{\Gamma(\alpha+\beta)} + O(s^{2\alpha})$. В частности, $E_{\alpha,\beta}(-\lambda s^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + O(s^\alpha)$. При изучении асимптотики функции $E_{\alpha,\beta}(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ принципиально важно различать два качественно различных режима поведения в зависимости от аргумента:

(а) сектора комплексной плоскости, где присутствует экспоненциальный вклад;

(б) сектора комплексной плоскости, где имеет место степенное затухание.

Пусть $0 < \alpha < 2$ и $\varepsilon > 0$. Тогда справедлива стандартная асимптотика

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \exp\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha k)} z^{-k} + O(|z|^{-m-1}) \quad (1.1.24)$$

равномерно в секторе $|\arg z| \leq \frac{\pi\alpha}{2} - \varepsilon$, $|z| \rightarrow \infty$. Вне этого сектора экспоненциальный член отсутствует, и ведущим является степенной ряд по z^{-1} .

Особенно важен вещественный отрицательный луч $z = -x$ при $x \rightarrow +\infty$. Для $\alpha \in (0,2)$ и фиксированного $m \in \mathbb{N}$ имеет место асимптотическое разложение

$$E_{\alpha,\beta}(-x) = - \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{\Gamma(\beta - \alpha k)} x^{-k} + O(x^{-m-1}), \quad x \rightarrow +\infty \quad (1.1.25)$$

при условии, что $\beta - \alpha k \notin \{0, -1, -2, \dots\}$.

В частности, если $0 < \alpha < 1$ и $\beta > \alpha$, то главный член (1.1.25) даёт

$$E_{\alpha, \beta}(-x) \sim \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha)} \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (1.1.26)$$

В типичных приложениях, связанных с описанием процессов затухания, рассматривается функция $E_{\alpha, \beta}(-x)$ при $x \geq 0$ и $0 < \alpha \leq 1$. Из классических результатов теории полностью монотонных функций следует, что при $0 < \alpha \leq 1$ функция $x \mapsto E_{\alpha}(-x)$ является полностью монотонной на $[0, +\infty)$, в частности неотрицательна и убывает. Более общие утверждения о монотонности и знакоопределённости для $E_{\alpha, \beta}(-x)$ требуют дополнительных ограничений на β ; в дальнейшем такие свойства используются только при явно указанных значениях параметров.

Функция Райта и семейство ядер типа w_{μ}

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ такая, что $\lambda > -1$, и $\mu \in \mathbb{C}$. Функция Райта $W_{\lambda, \mu}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ определяется рядом [61-63]

$$W_{\lambda, \mu}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\lambda k + \mu)}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.1.27)$$

Эквивалентная запись, часто используемая в литературе, задаёт ту же функцию как

$$\phi(\rho, \eta; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\rho k + \eta)}, \quad \rho > -1, \eta \in \mathbb{C} \quad (1.1.28)$$

то есть $\phi(\rho, \eta; z) \equiv W_{\rho, \eta}(z) = \phi_{\rho, \eta}(z)$.

Ряд (1.1.27) имеет бесконечный радиус сходимости, следовательно, $W_{\lambda, \mu}$ является целой функцией z при любом фиксированном $\lambda > -1$ и $\mu \in \mathbb{C}$. С точки зрения теории целых функций, порядок роста $W_{\lambda, \mu}$ равен $1/(1 + \lambda)$. В частности, при $\lambda \in (-1, 0)$ порядок превышает 1, что согласуется с наличием в асимптотике экспоненциальных членов вида $\exp\left\{c z^{\frac{1}{1+\lambda}}\right\}$.

Из (1.1.27) следует

$$W_{\lambda, \mu}(0) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}. \quad (1.1.29)$$

Почленное дифференцирование (1.1.27) даёт фундаментальное тождество:

$$\frac{d}{dz} W_{\lambda, \mu}(z) = W_{\lambda, \mu + \lambda}(z). \quad (1.1.30)$$

Повторное дифференцирование приводит к формуле

$$\frac{d^n}{dz^n} W_{\lambda, \mu}(z) = W_{\lambda, \mu + n\lambda}(z), n \in \mathbb{N}. \quad (1.1.31)$$

При $\lambda = 0$ из (1.1.27) получаем

$$W_{0, \mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{e^z}{\Gamma(\mu)}. \quad (1.1.32)$$

Указанный частный случай допускает использование в качестве контрольного примера для проверки существования аналитических формул и нормировочных соглашений

Далее особенно важен случай $\lambda = -\beta$, где $0 < \beta < 1$. Тогда $W_{-\beta, \mu}(z)$ и функции вида $W_{-\beta, \mu}(-z)$ обладают характерной экспоненциальной асимптотикой при $z \rightarrow +\infty$ по вещественной оси. Приведём соответствующие оценки в явном виде

Для фиксированных $0 < \beta < 1$ и $\mu \in \mathbb{R}$ существуют константы $C > 0$ и $c > 0$ такие, что для всех $z \geq 0$ выполнено

$$|W_{-\beta, \mu}(-z)| \leq C \exp\left(-cz^{\frac{1}{1-\beta}}\right). \quad (1.1.33)$$

В более точных утверждениях присутствует также степенной множитель z^k , зависящий от β и μ , однако во многих оценках достаточно формы (1.1.33).

Из ряда (1.1.27) следует, что при $z \rightarrow 0$ имеет место разложение

$$W_{-\beta, \mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} + \frac{z}{\Gamma(\mu - \beta)} + O(z^2), \quad z \rightarrow 0, \quad (1.1.34)$$

где коэффициенты определены при $\mu - \beta \notin \{0, -1, -2, \dots\}$, а при остальных значениях параметров понимаются в смысле аналитического продолжения; поскольку функция $1/\Gamma$ целая и обращается в нуль на неположительных целых, соответствующие члены ряда при этом равны нулю.

Пусть $0 < \beta < 1$ фиксировано, $\mu \in \mathbb{R}$ и $t > 0, x \geq 0$. Определим семейство функций двух переменных

$$w_{\mu}(x, t) := t^{\mu-1} \phi\left(-\beta, \mu; -\frac{x}{t^{\beta}}\right) = t^{\mu-1} W_{-\beta, \mu}\left(-\frac{x}{t^{\beta}}\right). \quad (1.1.35)$$

Функции w_μ являются самоподобными относительно масштабирования $(x, t) \mapsto (\kappa^\beta x, \kappa t)$, то есть зависят от переменных через автомодельную комбинацию x/t^β с точностью до степенного множителя.

Из определения (1.1.35) непосредственно следует масштабное соотношение: для любого $\kappa > 0$ и $x \geq 0, t > 0$ выполняется

$$w_\mu(\kappa^\beta x, \kappa t) = \kappa^{\mu-1} w_\mu(x, t). \quad (1.1.36)$$

Действительно, отношение $\frac{\kappa^\beta x}{(\kappa t)^\beta} = \frac{x}{t^\beta}$, а множитель $t^{\mu-1}$ даёт $\kappa^{\mu-1}$.

Используя (1.1.30) и производное от сложной функции, получаем (в классическом смысле по x при $x > 0$)

$$\frac{\partial}{\partial x} w_\mu(x, t) = -w_{\mu-\beta}(x, t). \quad (1.1.37)$$

Справедливость (1.1.37) вытекает непосредственно. Из (1.1.35) получаем $w_\mu(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k t^{\mu-1-\beta k}}{k! \Gamma(\mu-\beta k)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} w_\mu(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k x^{k-1} t^{\mu-1-\beta k}}{k! \Gamma(\mu-\beta k)} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k t^{\mu-\beta-1-\beta k}}{k! \Gamma(\mu-\beta-\beta k)} \\ &= -w_{\mu-\beta}(x, t), \end{aligned}$$

Повторяя (1.1.37), получаем

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} w_\mu(x, t) = (-1)^n w_{\mu-n\beta}(x, t), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.1.38)$$

Хотя w_μ вводится для задач с памятью, само семейство обладает простым правилом для обычной производной по t . Для $\mu \in \mathbb{R}, x \geq 0, t > 0$ справедливо

$$\frac{\partial}{\partial t} w_\mu(x, t) = w_{\mu-1}(x, t), \quad (1.1.39)$$

что проверяется почленным дифференцированием ряда по t и использованием тождества $(\mu-1-\beta k)/\Gamma(\mu-\beta k) = 1/\Gamma(\mu-1-\beta k)$, вытекающего из функционального уравнения гамма-функции.

Для фиксированного $x > 0$ функция $t \mapsto w_0(x, t)$ обладает нормировкой

$$\int_0^{+\infty} w_0(x, t) dt = 1, \quad (1.1.40)$$

поэтому при рассмотрении w_0 как интегрального ядра по переменной t будем говорить, что оно имеет единичную массу.

Строгое доказательство (1.1.40) может быть проведено различными способами (в частности, через исследование первообразной w_1 и предельные переходы), а сама формула является ключевой при оценке интегральных операторов с ядром w_0 .

В задачах, где w_0 рассматривается как временное ядро, используется свёрточная формула: для $a \geq 0, b \geq 0$ и $t > 0$ имеет место тождество

$$\int_0^t w_0(a, \sigma) w_0(b, t - \sigma) d\sigma = w_0(a + b, t). \quad (1.1.41)$$

Формула (1.1.41) выражает замкнутость семейства по свёртке по времени и естественно интерпретируется как аналог полугруппового свойства для самоподобных ядер.

Для последующего анализа важны априорные оценки, отражающие поведение w_μ при малых/больших отношениях x/t^β .

Пусть $0 < \beta < 1$ и $\mu \in \mathbb{R}$ фиксированы. Тогда существуют константы $C > 0, c > 0$ такие, что для всех $x \geq 0, t > 0$ выполняется

$$|w_\mu(x, t)| \leq C t^{\mu-1} \exp\left(-c \left(\frac{x}{t^\beta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right). \quad (1.1.42)$$

Оценка (1.1.42) является прямым следствием экспоненциальной асимптотики функции Райта (1.1.33) и представляет собой базовый инструмент для доказательства интегрируемости в окрестности $t = 0 +$ при фиксированном $x > 0$.

Пусть $0 < \beta < 1, \mu \in \mathbb{R}$ и $\theta \geq 0$. Тогда при подходящем выборе константы $C = C(\beta, \mu, \theta) > 0$ справедлива оценка

$$|w_\mu(x, t)| \leq C x^{-\theta} t^{\mu-1+\beta\theta}, \quad x > 0, t > 0. \quad (1.1.43)$$

Оценка (1.1.43) удобна для построения слабосингулярных мажорирующих функций и контроля сходимости интегралов, в которых переменные x и t входят раздельно в виде степенных множителей.

Константы в (1.1.42)-(1.1.43) зависят от фиксированных параметров β и μ , а также (для (1.1.43)) от θ , но не зависят от x и t .

При комплексных аргументах (если они возникают) выбор ветви должен быть фиксирован заранее; в дальнейшем, если не оговорено иное, используются главные ветви степенных функций.

В литературе часто встречаются функции вида

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)\Gamma(\delta - \beta n)}$$

для $\alpha > \beta, \alpha > 0$ и любого $z \in \mathbb{C}$, и справедливо равенство [43]

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t} e_{\alpha,\beta}^{\mu,0}(-\lambda t) dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{t} \phi\left(-\beta, 0; -\frac{t}{\lambda}\right) dt = \frac{\beta}{\Gamma(\mu)}.$$

Определим синус-преобразование по x , для фиксированных t, ξ, θ [64-66]:

$$\mathcal{F}_s[f](\omega) = \bar{f}_s(\omega) := \int_0^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx, \omega > 0 \quad (1.1.44)$$

с обратным преобразованием:

$$\mathcal{F}_s^{-1}[\bar{f}_s](x) = f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{f}_s(\omega) \sin(\omega x) d\omega \quad (1.1.45)$$

Рассмотрим преобразование Лапласа по переменной s :

$$\bar{K}(p) := \int_0^{\infty} K(s) e^{-ps} ds, \Re p > 0 \quad (1.1.46)$$

В степенях комплексного параметра p используется главная ветвь: $p^\rho = \exp(\rho \operatorname{Log} p)$, $-\pi < \arg p < \pi$. Отметим, что во многих задачах физики также возникают интегральные уравнения вида

$$\varphi(t) = f(t) + \int_t^{+\infty} K(t-s) \varphi(s) ds \quad (t > 0), \quad (1.1.47)$$

которые аналогично можно решать с помощью преобразования Лапласа. В [66], получено соотношение: $\mathcal{L}\left\{\int_t^{+\infty} K(t-s) \varphi(s) ds\right\} = \mathcal{K}(-p) \hat{\varphi}(p)$, где $\mathcal{K}(-p) = \int_0^{+\infty} K(-t) e^{pt} dt$. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям (1.1.47), получаем $\hat{\varphi}(p) = \frac{\hat{f}(p)}{1 - \mathcal{K}(-p)}$ ($\mathcal{K}(-p) \neq 1$). Функция

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\hat{f}(p)}{1 - \mathcal{K}(-p)} e^{pt} dp \quad (1.1.48)$$

является частным решением уравнения (1.1.47). Чтобы решение (1.1.48) имело смысл, необходимо, чтобы области аналитичности $\mathcal{K}(-p)$ и $\hat{f}(p)$ пересекались.

Пусть $0 < \alpha < 1, g \in L_{loc}^1(0, \infty), h(s) := (I_{0s}^{1-\alpha} g)(s) \in AC_{loc}([0, \infty))$, и пусть для некоторого $\omega \geq 0$ функции g и $D_{0s}^\alpha g = h'$ имеют преобразования Лапласа при $\text{Re } p > \omega$. Тогда $\mathcal{L}\{D_{0s}^\alpha g(s)\}(p) = p^\alpha \mathcal{L}\{g(s)\}(p) - h(0+)$, $\text{Re } p > \omega$. В частности, если $(I_{0s}^{1-\alpha} g)(0+) = 0$, то $\mathcal{L}\{D_{0s}^\alpha g(s)\}(p) = p^\alpha \mathcal{L}\{g(s)\}(p)$, $\text{Re } p > \omega$.

1.2 Дробные операторы

В работе используются дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля (включая правосторонние операторы на полуоси с верхним пределом $+\infty$, традиционно называемые операторами Лиувилля), а также производные Герасимова–Капуто. Ниже приведены определения, условия существования и набор свойств, которые далее используются в вычислениях (в частности, при интегрировании по частям и при переходе к операционным представлениям).

Дробные интегралы Римана-Лиувилля

Пусть $f \in L_1(a, b), \alpha > 0$. Тогда левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля определяется почти всюду на (a, b) формулой

$$(I_{at}^\alpha f)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad a < t < b, \quad (1.2.1)$$

Правосторонний дробный интеграл определяется

$$(I_{tb}^\alpha f)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad a < t < b. \quad (1.2.2)$$

Правосторонний интеграл Лиувилля на $(a, +\infty)$, переменная после знака ∞ указывает переменную, по которой берется интеграл. Пусть f задана на $(a, +\infty)$ и $\alpha > 0$. Определим

$$(I_{\infty t}^\alpha f)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a, \quad (1.2.3)$$

где интеграл понимается как несобственный:

$$\int_t^\infty (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau := \lim_{T \rightarrow \infty} \int_t^T (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

при условии существования этого предела (в частности, при абсолютной сходимости, то есть при выполнении условия $\int_t^\infty (\tau - t)^{\alpha-1} |f(\tau)| d\tau < \infty$).

Левосторонний интеграл с нижним пределом $-\infty$. Пусть f задана на \mathbb{R} и $\alpha > 0$.

$$(I_{-\infty t}^\alpha f)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.2.4)$$

где $\int_{-\infty}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau := \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$.

Операторы $I_{at}^\alpha, I_{tb}^\alpha, I_{\infty t}^\alpha, I_{-\infty t}^\alpha$ линейны на своих областях определения. При $\alpha = 0$ полагают $I_{at}^0 = I_{bt}^0 = \text{Id}$. Если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то I_{at}^n и I_{tb}^n совпадают с n -кратным обычным интегрированием.

Если $\alpha, \beta > 0$ и соответствующие композиции определены, то

$$I_{at}^\alpha I_{at}^\beta f = I_{a+}^{\alpha+\beta} f, \quad (1.2.5)$$

$$I_{tb}^\alpha I_{tb}^\beta f = I_{tb}^{\alpha+\beta} f, \quad (1.2.6)$$

$$I_{-\infty t}^\alpha I_{-\infty t}^\beta f = I_{-\infty t}^{\alpha+\beta} f, \quad (1.2.7)$$

$$I_{+\infty t}^\alpha I_{+\infty t}^\beta f = I_{+\infty t}^{\alpha+\beta} f. \quad (1.2.8)$$

Для $a = 0$ левый интеграл имеет сверточный вид: $(I_{0t}^\alpha f)(t) = (k_\alpha * f)(t)$, $k_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} H(t)$. Для правостороннего интеграла Лиувилля удобно использовать замену $\tau = t + s$:

$$(I_{+\infty t}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} f(t+s) ds, \quad t > a. \quad (1.2.9)$$

Из (1.2.9) немедленно следует инвариантность относительно сдвигов (для всех $h \in \mathbb{R}$, когда выражения определены):

$$I_{+\infty}^\alpha (f(\cdot + h))(t) = (I_{+\infty}^\alpha f)(t + h). \quad (1.2.10)$$

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$ и $f \in L_p(a, b)$, тогда $I_{at}^\alpha f, I_{tb}^\alpha f$ определены почти всюду на (a, b) и принадлежат $L_p(a, b)$. Более того,

$$\|I_{at}^\alpha f\|_{L_p(a,b)} \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L_p(a,b)}, \|I_{tb}^\alpha f\|_{L_p(a,b)} \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L_p(a,b)}. \quad (1.2.11)$$

Это следует из неравенств Минковского и интегрируемости ядра на конечном интервале.

Замечание 1.2.1. Для $I_{+\infty}^\alpha$ ядро $s^{\alpha-1}$ неинтегрируемо на $(0, \infty)$ при $\alpha > 0$, поэтому для сходимости (1.2.3) требуется убывание $f(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Достаточное условие (для фиксированного t) имеет вид $|f(\tau)| \leq C(1 + \tau)^{-1-\alpha-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), или экспоненциальное убывание; в прикладных задачах часто достаточно функции с компактным носителем.

Пусть $\alpha > 0, f \in L_p(a, b), g \in L_q(a, b)$, где $1 \leq p, q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$ причём в случае равенства $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$ предполагается, что $p > 1$ и $q > 1$. Тогда справедлива формула дробного интегрирования по частям:

$$\int_a^b (I_{at}^\alpha f)(t)g(t)dt = \int_a^b f(t)(I_{tb}^\alpha g)(t)dt. \quad (1.2.12)$$

Аналогично на полуоси: если $\int_a^\infty \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} |f(\tau)||g(t)|d\tau dt < \infty$, то

$$\int_a^\infty (I_{at}^\alpha f)(t)g(t)dt = \int_a^\infty f(t)(I_{\infty t}^\alpha g)(t)dt. \quad (1.2.13)$$

Производные Римана-Лиувилля

Пусть $\alpha > 0$ и $m = [\alpha]: m \in \mathbb{N}, m - 1 < \alpha \leq m$.

Левосторонняя производная Римана-Лиувилля. Если $I_{a+}^{m-\alpha} f$ существует и $I_{a+}^{m-\alpha} f \in AC^m(a, b)$, то

$$(D_{at}^\alpha f)(t) := \frac{d^m}{dt^m} (I_{at}^{m-\alpha} f)(t), \quad a < t < b. \quad (1.2.14)$$

В частности, при $0 < \alpha < 1$ ($m = 1$)

$$(D_{at}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (1.2.15)$$

Правосторонняя производная Римана-Лиувилля. Если $I_{b-}^{m-\alpha} f$ существует и $I_{b-}^{m-\alpha} f \in AC^m(a, b)$, то

$$(D_{tb}^\alpha f)(t) := (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} (I_{tb}^{m-\alpha} f)(t), \quad a < t < b. \quad (1.2.16)$$

При $0 < \alpha < 1$:

$$(D_{tb}^\alpha f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^\alpha} d\tau. \quad (1.2.17)$$

Если $I_{\infty t}^{m-\alpha} f$ существует и допускает m -кратное дифференцирование, то

$$(D_{\infty t}^\alpha f)(t) := (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} (I_{\infty t}^{m-\alpha} f)(t), \quad t > a. \quad (1.2.18)$$

При $0 < \alpha < 1$:

$$(D_{\infty t}^{\alpha} f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^{\infty} \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha}} d\tau. \quad (1.2.19)$$

Если $f \in L_1(a, b)$ и $I_{at}^{\alpha} f$ принадлежит области определения D_{at}^{α} , то

$$D_{at}^{\alpha} I_{at}^{\alpha} f = f \text{ почти всюду на } (a, b). \quad (1.2.20)$$

Аналогично

$$D_{tb}^{\alpha} I_{tb}^{\alpha} f = f \text{ почти всюду на } (a, b). \quad (1.2.21)$$

На полуоси при достаточном убывании также

$$D_{\infty t}^{\alpha} I_{\infty t}^{\alpha} f = f \text{ почти всюду на } (a, \infty). \quad (1.2.22)$$

Пусть $m-1 < \alpha \leq m$ и $I_{at}^{m-\alpha} f \in AC^m(a, b)$. Тогда

$$I_{at}^{\alpha} D_{at}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(I_{at}^{m-\alpha} f)^{(k)}(a+)}{k!} (t-a)^k, \quad a < t < b. \quad (1.2.23)$$

Аналогично для правостороннего оператора:

$$I_{tb}^{\alpha} D_{tb}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k (I_{tb}^{m-\alpha} f)^{(k)}(b-)}{k!} (b-t)^k. \quad (1.2.24)$$

В частности, если соответствующие граничные величины равны нулю, то $I^{\alpha} D^{\alpha} f = f$.

В общем случае $D_{at}^{\alpha} D_{at}^{\beta} \neq D_{at}^{\alpha+\beta}$ из-за граничных слагаемых. Однако если f такая, что $(I_{at}^{m-\alpha} f)^{(k)}(a+) = 0$, то допускается

$$D_{at}^{\alpha} D_{at}^{\beta} f = D_{at}^{\alpha+\beta} f \quad (1.2.25)$$

аналогичное соотношение имеет место для правосторонних производных при условии обращения в нуль граничных слагаемых на бесконечности.

Производная Герасимова-Капуто

Далее производную Герасимова-Капуто обозначаем символом ∂ . Пусть $m-1 < \alpha \leq m$. Если $f \in AC^m(a, b)$ (т.е. $f^{(m)} \in L_1(a, b)$), то

$$(\partial_{at}^\alpha f)(t) := (I_{at}^{m-\alpha} f^{(m)})(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \quad (1.2.26)$$

При $0 < \alpha < 1$:

$$(\partial_{at}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (1.2.27)$$

Если $f \in AC^m(a, b)$, то

$$\begin{aligned} (\partial_{tb}^\alpha f)(t) &:= (-1)^m (I_{tb}^{m-\alpha} f^{(m)})(t) = \\ &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

При $0 < \alpha < 1$:

$$(\partial_{tb}^\alpha f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^b \frac{f'(\tau)}{(\tau-t)^\alpha} d\tau. \quad (1.2.29)$$

Если f задана на (a, ∞) , $f \in AC^m(a, \infty)$ и несобственный интеграл сходится, то

$$\begin{aligned} (\partial_{\infty t}^\alpha f)(t) &:= (-1)^m (I_{\infty t}^{m-\alpha} f^{(m)})(t) = \\ &= \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^\infty (\tau-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

При $0 < \alpha < 1$:

$$(\partial_{\infty t}^\alpha f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^\infty \frac{f'(\tau)}{(\tau-t)^\alpha} d\tau. \quad (1.2.31)$$

Если $f(t) = (t-a)^k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, то

$$\partial_{at}^\alpha (t-a)^k = 0, k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1.2.32)$$

Если $f \in AC^m(a, b)$, то

$$\partial_{at}^\alpha f(t) = D_{at}^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a+)}{k!} (t-a)^k \right). \quad (1.2.33)$$

Аналогичная формула верна для правостороннего случая.

Связь производных Римана-Лиувилля и Герасимова-Капуто

Пусть $m - 1 < \alpha < m$ и $f \in AC^m(a, b)$. Тогда

$$D_{at}^\alpha f(t) = \partial_{at}^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a+)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha}, \quad a < t < b. \quad (1.2.34)$$

В частности, при $0 < \alpha < 1$:

$$D_{at}^\alpha f(t) = \partial_{at}^\alpha f(t) + \frac{f(a+)}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}. \quad (1.2.35)$$

Пусть $m - 1 < \alpha < m$ и $f \in AC^m(a, b)$. Тогда

$$D_{tb}^\alpha f(t) = \partial_{tb}^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b-)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (b-t)^{k-\alpha}. \quad (1.2.36)$$

При $b = \infty$ формула понимается в виде предельного перехода $b \rightarrow \infty$ и имеет смысл только при заданных асимптотиках $f^{(k)}(t)$, обеспечивающих обращение в нуль граничных слагаемых. В частности, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^{(k)}(t) = 0, k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (1.2.37)$$

и все операторы определены, то

$$D_{\infty t}^\alpha f(t) = \partial_{\infty t}^\alpha f(t). \quad (1.2.38)$$

Интегрирование по частям для производных Герасимова-Капуто

Пусть $m - 1 < \alpha \leq m$, $f \in AC^m(a, b)$, а g такая, что $D_{b-}^\alpha g$ существует и все интегралы ниже сходятся (например, $g \in L_1(a, b)$ и $I_{b-}^{m-\alpha} g \in AC^m(a, b)$).

Для левосторонней производной Капуто, имеет место формула интегрирования по частям [13]-[15]:

$$\int_a^b (\partial_{at}^\alpha f)(t) g(t) dt = \int_a^b f(t) (D_{tb}^\alpha g)(t) dt + \sum_{k=0}^{m-1} [f^{(k)}(t) (I_{tb}^{k+1-\alpha} g)(t)]_{t=a}^{t=b}. \quad (1.2.39)$$

В случае $0 < \alpha < 1$ ($m = 1$) (1.2.39) примет вид

$$\int_a^b (\partial_{at}^\alpha f)(t) g(t) dt = \int_a^b f(t) (D_{tb}^\alpha g)(t) dt + [f(t) (I_{tb}^{1-\alpha} g)(t)]_{t=a}^{t=b}. \quad (1.2.40)$$

Аналогично для правосторонней производной Капуто, если $D_{a+}^{\alpha}g$ существует, то

$$\int_a^b (\partial_{tb}^{\alpha}f)(t)g(t)dt = \int_a^b f(t)(D_{at}^{\alpha}g)(t)dt + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+1} [f^{(k)}(t)(I_{at}^{k+1-\alpha}g)(t)]_{t=a}^{t=b}. \quad (1.2.41)$$

Пусть $m - 1 < \alpha \leq m$, $f \in AC^m(a, \infty)$, g такая, что $D_{\infty-}^{\alpha}g$ существует, и все интегралы сходятся. Тогда формула (1.2.41) переходит в

$$\int_a^{\infty} (\partial_{at}^{\alpha}f)(t)g(t)dt = \int_a^{\infty} f(t)(D_{\infty t}^{\alpha}g)(t)dt + \sum_{k=0}^{m-1} [f^{(k)}(t)(I_{\infty t}^{k+1-\alpha}g)(t)]_{t=a}^{t=\infty}. \quad (1.2.42)$$

Следовательно, при условии, что граничный член на бесконечности обращается в нуль

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^{(k)}(t)(I_{\infty t}^{k+1-\alpha}g)(t) = 0, k = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (1.2.43)$$

то

$$\int_a^{\infty} (\partial_{at}^{\alpha}f)(t)g(t)dt = \int_a^{\infty} f(t)(D_{\infty t}^{\alpha}g)(t)dt - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(a+)(I_{\infty t}^{k+1-\alpha}g)(a). \quad (1.2.44)$$

Связь левосторонних и правосторонних операторов на бесконечных интервалах

Введём оператор отражения $(\mathcal{R}f)(t) := f(-t)$. Тогда непосредственной заменой переменной в интегралах получаем [64]:

$$I_{\infty t}^{\alpha} = \mathcal{R}I_{-\infty t}^{\alpha}\mathcal{R}, \quad (1.2.45)$$

$$D_{\infty t}^{\alpha} = \mathcal{R}D_{-\infty t}^{\alpha}\mathcal{R}, \quad (1.2.46)$$

$$\partial_{\infty t}^{\alpha} = \mathcal{R}\partial_{-\infty t}^{\alpha}\mathcal{R}, \quad (1.2.47)$$

во всех случаях, когда соответствующие выражения определены.

Для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ определим $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} f(t) dt$. Тогда при стандартном выборе ветви комплексной степени

$$\mathcal{F}\{D_{-\infty t}^{\alpha} f\}(\xi) = (i\xi)^{\alpha} \hat{f}(\xi), \quad (1.2.48)$$

$$\mathcal{F}\{D_{\infty t}^{\alpha} f\}(\xi) = (-i\xi)^{\alpha} \hat{f}(\xi), \quad (1.2.49)$$

где удобно фиксировать

$$(i\xi)^{\alpha} = |\xi|^{\alpha} \exp\left(i \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sgn}\xi\right), \quad (-i\xi)^{\alpha} = |\xi|^{\alpha} \exp\left(-i \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sgn}\xi\right).$$

Пусть f задана на $[0, \infty)$ и $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$, $\operatorname{Res} > \sigma_0$. При стандартных условиях, обеспечивающих перестановку интегралов,

$$\mathcal{L}\{I_{0t}^{\alpha} f\}(s) = s^{-\alpha} F(s), \quad \alpha > 0. \quad (1.2.50)$$

Пусть $m - 1 < \alpha \leq m$ и $f \in AC^m[0, T]$ для любого $T > 0$, а также $f^{(m)}$ имеет преобразование Лапласа. Тогда

$$\mathcal{L}\{\partial_{0t}^{\alpha} f\}(s) = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0+). \quad (1.2.51)$$

Для $0 < \alpha < 1$ имеем

$$\mathcal{L}\{D_{0t}^{\alpha} f\}(s) = s^{\alpha} F(s) - s^{\alpha-1} (I_{0t}^{1-\alpha} f)(0+) \quad (1.2.52)$$

и, в частности, если $(I_{0t}^{1-\alpha} f)(0+) = 0$, то

$$\mathcal{L}\{D_{0t}^{\alpha} f\}(s) = s^{\alpha} F(s). \quad (1.2.53)$$

Действие дробных операторов на функции

Пусть $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Тогда для $t > a$ справедливо

$$I_{at}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha-1}. \quad (1.2.54)$$

Аналогично для $t < b$:

$$I_{tb}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-t)^{\beta+\alpha-1}. \quad (1.2.55)$$

Пусть $m - 1 < \alpha < m$ и $\beta > 0$. Тогда

$$D_{at}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad (1.2.56)$$

$$D_{tb}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1}. \quad (1.2.57)$$

Для операторов с началом в $+\infty$ рассматриваются функции, имеющие достаточное убывание при $t \rightarrow \infty$. Пусть $t > 0, \alpha > 0$ и $\beta > \alpha$. Тогда для $f(t) = t^{-\beta}$ имеем,

$$(I_{\infty t}^{\alpha} t^{-\beta})(t) = \frac{\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)} t^{\alpha-\beta}, \quad n = [\alpha], \quad \beta > n - \alpha, \quad (1.2.58)$$

При тех же предположениях получаем

$$(D_{\infty t}^{\alpha} t^{-\beta})(t) = \frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{\Gamma(\beta)} t^{-(\beta+\alpha)}, \quad \beta > 0, \quad (1.2.59)$$

что согласуется с $D_{\infty-}^{\alpha} I_{\infty-}^{\alpha} = \text{Id}$ на соответствующем классе функций.

Пусть $\lambda > 0$. Тогда для правосторонних операторов на полуоси (при $t > a$)

$$I_{\infty t}^{\alpha}(e^{-\lambda t}) = \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda t}, \quad D_{\infty t}^{\alpha}(e^{-\lambda t}) = \lambda^{\alpha} e^{-\lambda t}. \quad (1.2.60)$$

Аналогично, с нижним пределом $-\infty$

$$I_{-\infty t}^{\alpha}(e^{\lambda t}) = \lambda^{-\alpha} e^{\lambda t}, \quad D_{-\infty t}^{\alpha}(e^{\lambda t}) = \lambda^{\alpha} e^{\lambda t}. \quad (1.2.61)$$

Далее используются двухпараметрическая функция Миттага-Леффлера (1.1.16) и функция Райта (1.1.28).

Для левосторонних операторов с началом в нуле при $\rho > 0, \lambda > 0$ и при условиях существования соответствующих дробных операторов справедливы следующие формулы:

$$I_{0+}^{\alpha} [t^{\mu-1} E_{\rho, \mu}(ct^{\rho})] = t^{\mu+\alpha-1} E_{\rho, \mu+\alpha}(ct^{\rho}), \quad \text{Re} \mu > 0 \quad (1.2.62)$$

$$D_{0+}^{\alpha} [t^{\mu-1} E_{\rho, \mu}(ct^{\rho})] = t^{\mu-\alpha-1} E_{\rho, \mu-\alpha}(ct^{\rho}), \quad \text{Re} \mu > \alpha, \quad (1.2.63)$$

$$I_{0+}^{\alpha} [t^{\mu-1} \phi_{\lambda, \mu}(at^{\lambda})] = t^{\mu+\alpha-1} \phi_{\lambda, \mu+\alpha}(at^{\lambda}), \quad \text{Re} \mu > 0 \quad (1.2.64)$$

$$D_{0+}^{\alpha} [t^{\mu-1} \phi_{\lambda, \mu}(at^{\lambda})] = t^{\mu-\alpha-1} \phi_{\lambda, \mu-\alpha}(at^{\lambda}), \quad \text{Re} \mu > \alpha. \quad (1.2.65)$$

Если $0 < \alpha < 1$ и $\text{Re} \mu > 1$, то производные Капуто и Римана-Лиувилля совпадают:

$$\partial_{0t}^{\alpha} [t^{\mu-1} \phi_{\lambda, \mu}(at^{\lambda})] = t^{\mu-\alpha-1} \phi_{\lambda, \mu-\alpha}(at^{\lambda}). \quad (1.2.66)$$

Если $u(\tau) = 0$ при $\tau > \theta$, то для $t < \theta$:

$$(I_{\infty t}^{\alpha} u)(t) = (I_{t\theta}^{\alpha} u)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{\theta} (\tau - t)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau, \quad (1.2.67)$$

а при существовании соответствующих производных

$$(D_{\infty t}^{\gamma} u)(t) = (D_{t\theta}^{\gamma} u)(t), \quad 0 < \gamma < 1, \quad (1.2.68)$$

что следует из зануления хвоста интеграла на (θ, ∞) .

Пусть $0 < \alpha < 2$. Тогда для $x \geq 0$ справедливы следующие интегральные представления [67-72]:

$$\begin{aligned} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 2 - \frac{\alpha}{2}; -x\right) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} E_{\alpha, 2}(-\xi^2) \cos(x\xi) d\xi, \\ \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -x\right) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} E_{\alpha, \alpha}(-\xi^2) \cos(x\xi) d\xi. \end{aligned}$$

При тех же $0 < \alpha < 2$ имеет место формула

$$\phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}; -x\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} E_{\alpha}(-\xi^2) \cos(x\xi) d\xi, \quad x \geq 0,$$

Пусть $\rho > -1$, $\mu \in \mathbb{C}$ и $\Re s > 0$, тогда выполняются равенства:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \phi(\rho, \mu; t) dt = \frac{1}{s} E_{\rho, \mu}\left(\frac{1}{s}\right), \quad \int_0^{\infty} e^{-st} \phi(\rho, \mu; -t) dt = \frac{1}{s} E_{\rho, \mu}\left(-\frac{1}{s}\right).$$

Кроме того, при условии $\Re(\mu - \rho) > 0$ имеет место нормировочная формула $\int_0^{\infty} \phi(\rho, \mu; -x) dx = \frac{1}{\Gamma(\mu - \rho)}$. В частности, для $0 < \alpha < 2$ из предыдущего тождества получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 2 - \frac{\alpha}{2}; -x\right) dx &= \frac{1}{\Gamma(2)} = 1, \\ \int_0^{\infty} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -x\right) dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Пусть $\rho > -1$, $\mu \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда функция Райта удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\rho z \phi(\rho, \rho + \mu; z) = \phi(\rho, \mu - 1; z) + (1 - \mu) \phi(\rho, \mu; z),$$

а также формуле дифференцирования по аргументу $\frac{d}{dz} \phi(\rho, \mu; z) = \phi(\rho, \rho + \mu; z)$.

Для контроля предельных случаев полезны следующие частные значения:

$$\begin{aligned} \phi(0, 1; z) &= e^z, \\ \phi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -x\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right), \quad x \geq 0, \\ \phi\left(-\frac{1}{2}, 1; -x\right) &= \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Пусть $0 < \alpha < 1, \lambda > 0, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{C}$. Тогда справедливы формулы обратного преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{\exp(-\lambda s^\alpha)\}(t) &= \frac{\alpha \lambda}{t^{\alpha+1}} M(\alpha; \lambda t^{-\alpha}), \quad t > 0, \\ \mathcal{L}^{-1}\{s^{\alpha-1} \exp(-\lambda s^\alpha)\}(t) &= \frac{1}{t^\alpha} M(\alpha; \lambda t^{-\alpha}), \quad t > 0, \\ \mathcal{L}^{-1}\{s^{-\beta} \exp(-\lambda s^\alpha)\}(t) &= t^{\beta-1} \phi(-\alpha, \beta; -\lambda t^{-\alpha}), \quad t > 0. \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\gamma}}{s^\alpha - \lambda}\right\}(t) &= t^{\gamma-1} E_{\alpha, \gamma}(\lambda t^\alpha), \quad \alpha > 0, \Re \gamma > 0. \end{aligned}$$

1.3 Некоторые сведения из теории дробных дифференциальных уравнений

В данном разделе показаны постановки начальных задач для дробных дифференциальных уравнений, их редукция к уравнениям Вольтерра второго рода и основные результаты о существовании, единственности и априорных оценках, которые далее используются при обосновании существования интегральных представлений и при доказательствах существования искомого граничных функций.

Задача Коши для уравнения с производной Капуто и эквивалентное уравнение Вольтерра

Пусть $\alpha > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ таково, что $m - 1 < \alpha \leq m$. Рассмотрим задачу Коши для нелинейного уравнения дробного порядка в Капуто [67]:

$$\partial_{0t}^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad 0 < t \leq T, \quad (1.3.1)$$

$$y^{(k)}(0+) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1.3.2)$$

где $T > 0$ фиксировано, а правая часть f задана на области $\{(t, u): 0 \leq t \leq T, u \in \mathbb{R}\}$.

Определение 1.3.1. Пусть $\alpha > 0, m \in \mathbb{N}$ и $m - 1 < \alpha \leq m$. Функция y называется решением задачи (1.3.1)-(1.3.2) на $[0, T]$, если $y \in AC^m[0, T], f(\cdot, y(\cdot)) \in L_1(0, T)$, уравнение $\partial_{0+}^\alpha y(t) = f(t, y(t))$ выполняется почти всюду на $(0, T)$, а начальные условия выполняются в виде $y^{(k)}(0) = y_k, k = 0, 1, \dots, m - 1$.

Лемма 1.3.1. Пусть $\alpha > 0, m \in \mathbb{N}, m - 1 < \alpha \leq m$, и $f \in C([0, T] \times \mathbb{R})$. Для функции $y \in AC^m[0, T]$ следующие утверждения эквивалентны:

1. y является решением задачи (1.3.1)-(1.3.2);
2. для всех $t \in [0, T]$ выполнено интегральное уравнение

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y_k}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (1.3.3)$$

Случай $0 < \alpha < 1$. Тогда $m = 1$, и (1.3.3) принимает вид

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.3.4)$$

Это уравнение Вольтерра второго рода со слабой особенностью ядра $(t - \tau)^{\alpha-1}$ при $\tau \rightarrow t$ (поскольку $\alpha - 1 \in (-1, 0)$).

Существование и единственность решения задачи Коши: принцип сжатия и последовательные приближения

Эквивалентность задач (1.3.1)–(1.3.2) и интегрального уравнения (1.3.3) позволяет свести вопрос существования и единственности решения к соответствующим результатам для уравнений Вольтерра. В частности, при условии Липшица по y можно применять принцип сжимающих отображений Банаха и метод последовательных приближений (итерации Пикара).

Теорема 1.3.1. Пусть f непрерывна на $[0, T] \times \mathbb{R}$ и удовлетворяет условию Липшица по второй переменной: существует $L > 0$ такое, что

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u, v \in \mathbb{R} \quad (1.3.5)$$

Тогда существует $T_0 \in (0, T]$ такое, что задача (1.3.1)-(1.3.2) имеет единственное решение на $[0, T_0]$. Более того, можно выбрать T_0 так, чтобы

$$\frac{LT_0^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1 \quad (1.3.6)$$

Дробное неравенство Гронуолла и априорные оценки

Априорные оценки решений дробных уравнений, а также результаты о единственности и непрерывной зависимости решений от исходных данных, удобно получать из интегральной формы таких уравнений, сводящейся к неравенствам Вольтерра со слабосингулярным ядром. В этом контексте

основным инструментом служит дробный аналог неравенства Гронуолла, позволяющий оценивать неизвестную функцию через функцию Миттаг–Леффлера и тем самым контролировать рост решения и чувствительность к возмущениям правой части и начальных условий [68].

Лемма 1.3.2. Пусть $0 < \alpha < 1$ и функция $u: [0, T] \rightarrow [0, +\infty)$ непрерывна. Предположим, что существуют константы $A \geq 0, B \geq 0$ такие, что для всех $t \in [0, T]$ выполнено

$$u(t) \leq A + \frac{B}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau. \quad (1.3.7)$$

Тогда для всех $t \in [0, T]$ справедлива оценка

$$u(t) \leq AE_\alpha(Bt^\alpha), \quad (1.3.8)$$

где $E_\alpha(z)$ - функция Миттаг-Леффлера.

Следствие 1.3.1. Пусть $0 < \alpha < 1$ и функция f удовлетворяет условию Липшица по второй переменной: существует $L > 0$ такое, что $|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|, 0 \leq t \leq T, u, v \in \mathbb{R}$

Пусть y_1, y_2 - решения одной и той же задачи Коши для уравнения с производной Капуто $\partial_{0t}^\alpha y(t) = f(t, y(t)), 0 < t \leq T$ с начальными условиями $y_1(0) = y_{0,1}, y_2(0) = y_{0,2}$. Тогда для всех $t \in [0, T]$ выполняется оценка $|y_1(t) - y_2(t)| \leq |y_{0,1} - y_{0,2}| E_\alpha(Lt^\alpha)$

Линейные дробные уравнения и формула вариации постоянных

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с постоянным коэффициентом [69]

$$\partial_{0t}^\alpha y(t) = \lambda y(t) + g(t), 0 < t \leq T \quad (1.3.9)$$

с начальными условиями (1.3.2), где $\lambda \in \mathbb{C}$ и g задана на $[0, T]$.

Утверждение 1.3.1. Пусть $g \in AC[0, T]$ и $m - 1 < \alpha \leq m$. Тогда задача (1.3.9), (1.3.2) имеет единственное решение на $[0, T]$, причём для всех $t \in [0, T]$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y_k t^k E_{\alpha, k+1}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t - \tau)^\alpha) g(\tau) d\tau. \quad (1.3.10)$$

Задачи на бесконечном интервале

Во многих приложениях естественно рассматривать дробные производные Римана-Лиувилля с бесконечным началом, то есть производные Лиувилля-Вейля. Для определённости приведём типичный случай $0 < \alpha < 1$ на полуоси $(-\infty, 0]$.

Нелинейное уравнение Лиувилля-Вейля. Рассмотрим уравнение

$$D_{-\infty t}^{\alpha} y(t) = F(t, y(t)), \quad t \leq 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.3.11)$$

дополненное условием затухания на бесконечности

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0 \text{ (или более сильным условием в весовом пространстве)}. \quad (1.3.12)$$

Утверждение 1.3.2. Пусть $F(\cdot, \cdot)$ непрерывна, а функция y такая, что правая часть $F(\cdot, y(\cdot))$ интегрируема на всяком $(-\infty, t]$ и существует дробный интеграл $I_{-\infty}^{\alpha} F(\cdot, y(\cdot))$. Тогда при условии (1.3.12) уравнение (1.3.11) эквивалентно интегральному уравнению $y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t - \tau)^{\alpha-1} F(\tau, y(\tau)) d\tau, t \leq 0$.

Уравнения Вольтерра второго рода со слабой особенностью

Во многих местах дальнейшего изложения возникают уравнения Вольтерра второго рода со слабосингулярным ядром (в частности, после редукции дробного уравнения к интегральной форме).

Пусть $T_1 < T_2$ и дано уравнение

$$u(t) = \mathcal{F}(t) + \int_{T_1}^t \frac{H(t, \tau)}{(t - \tau)^{\beta}} u(\tau) d\tau, \quad T_1 \leq t \leq T_2, \quad (1.3.13)$$

где $0 \leq \beta < 1$, функция $\mathcal{F} \in C[T_1, T_2]$, а H непрерывна на треугольнике $\Delta = \{(t, \tau) : T_1 \leq \tau \leq t \leq T_2\}$, тогда $(t - \tau)^{-\beta}$ интегрируема по τ вблизи $\tau = t$, и интеграл в правой части (1.3.13) определен для каждого $t \in [T_1, T_2]$.

Лемма 1.3.3. Пусть $T_1 < T_2, 0 \leq \beta < 1, \mathcal{F} \in C[T_1, T_2]$, а функция H непрерывна на $\Delta = \{(t, \tau) : T_1 \leq \tau \leq t \leq T_2\}$. Тогда уравнение (1.3.13) имеет единственное решение $u \in C[T_1, T_2]$.

Замечание о численной аппроксимации

Если в работе требуется численная проверка аналитических формул, то для начальной задачи (1.3.1)-(1.3.2) удобен предиктор-корректорный метод типа Адамса-Башфорта-Мултона для производной Капуто. [70] Для краткости приведём наиболее употребительный случай $0 < \alpha < 1$ (то есть $m = 1$).

Пусть $t_n = nh, h = T/N, n = 0, 1, \dots, N$. Тогда интегральная форма (1.3.4) даёт аппроксимации

$$y_{n+1}^P = y_0 + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{j=0}^n b_j^{(n+1)} f(t_j, y_j),$$

$$y_{n+1} = y_0 + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 2)} \left(f(t_{n+1}, y_{n+1}^P) + \sum_{j=0}^n a_j^{(n+1)} f(t_j, y_j) \right),$$

где веса задаются формулами

$$\begin{aligned} b_j^{(n+1)} &= (n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha, & 0 \leq j \leq n \\ a_0^{(n+1)} &= n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha, \\ a_j^{(n+1)} &= (n-j+2)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

Данный метод естественным образом отражает нелокальность дробного оператора (учёт всей предыстории $\{y_j\}_{j \leq n}$) и является прямым численным аналогом уравнения Вольтерра (1.3.4).

2 РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ РИМАНА ЛИУВИЛЛЯ

2.1 Решение обыкновенного дифференциального уравнения с дробной производной Лиувилля

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение с правосторонней производной дробного порядка Лиувилля с началом в точке ∞ :

$$D_{\infty t}^{\gamma} u(t) + \lambda u(t) = f(t), \quad t > 0, \quad (2.1.1)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ - постоянная, $f(t)$ - заданная функция, а оператор $D_{+\infty}^{\gamma}$ определяется как (1.2.19):

$$D_{\infty t}^{\gamma} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left(-\frac{d}{dt}\right) \int_t^{\infty} \frac{u(\tau)}{(\tau-t)^{\gamma}} d\tau, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (2.1.2)$$

Класс функций, в котором лежит $f(t)$ будет найден позже. Воспользуемся методом Грина для решения данного уравнения.

$$\int_x^{\infty} g(x,t) [D_{\infty t}^{\gamma} u(t) + \lambda u(t)] dt = \int_x^{\infty} g(x,t) f(t) dt. \quad (2.1.3)$$

Вычислим левую часть уравнения (2.1.3). Воспользовавшись интегрированием по частям, имеем:

$$\int_x^{\infty} g(x,t) \left[-\frac{d}{dt}\right] D_{\infty t}^{\gamma-1} u(t) dt = \underbrace{-g(x,t) D_{\infty t}^{\gamma-1} u(t)}_{G(x)} \Big|_x^{\infty} + \int_x^{\infty} g_t(x,t) D_{\infty t}^{\gamma-1} u(t) dt,$$

в итоге получаем

$$G(x) + \int_x^{\infty} g_t(x,t) D_{\infty t}^{\gamma-1} u(t) dt + \int_x^{\infty} g(x,t) \lambda u(t) dt = \int_x^{\infty} g(x,t) f(t) dt. \quad (2.1.4)$$

Далее повторно воспользовавшись интегрированием по частям для второго слагаемого в (2.1.4), получаем:

$$G(x) + \int_x^{\infty} u(t) [\partial_{xt}^{\gamma} g(x,t) + \lambda g(x,t)] dt = \int_x^{\infty} g(x,t) f(t) dt. \quad (2.1.5)$$

Здесь $\partial_{xt}^{\gamma} g(x,t)$ понимается как левосторонняя производная Капуто по переменной t с началом в точке x :

$$\partial_{xt}^\gamma g(x, t) := \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_x^t \frac{\partial g(x, s)/\partial s}{(t-s)^\gamma} ds, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Переход получен перестановкой порядка интегрирования при выполнении условий интегрируемости, обеспечивающих абсолютную сходимость соответствующих интегралов.

Рассмотрим подынтегральное выражение в (2.1.5) для отыскания функции $g(x, t)$:

$$\partial_{xt}^\gamma g(x, t) + \lambda g(x, t) = \frac{(t-x)^{\varepsilon-1}}{\Gamma(\varepsilon)}. \quad (2.1.6)$$

Для решения полученного обыкновенного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто, введем замену переменных: $\tau = t - x$; $g(x, t) = v(\tau)$. Тогда здесь $v(0) = g(x, x) = 0$. Мы будем рассматривать следующий интеграл $\int_x^t \frac{g_t(x, s)}{(t-s)^\gamma} ds$, введя сдвиг $s = x + y$, получим $\partial_{0\tau}^\gamma v(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^\tau \frac{v'(y)}{(\tau-y)^\gamma} dy$. Наше уравнение (2.1.6) примет вид

$$\partial_{0\tau}^\gamma v(\tau) + \lambda v(\tau) = \frac{\tau^{\varepsilon-1}}{\Gamma(\varepsilon)}. \quad (2.1.7)$$

Для решения данного дробного дифференциального уравнения воспользуемся преобразованием Лапласа по переменной τ : $\mathcal{L}\{\partial_{0\tau}^\gamma v(\tau)\} = s^\gamma V(s) - s^{\gamma-1}v(0)$. А правая часть (2.1.7) примет вид $\mathcal{L}\left\{\frac{\tau^{\varepsilon-1}}{\Gamma(\varepsilon)}\right\} = s^{-\varepsilon}$. Тогда: $s^\gamma V(s) + \lambda V(s) = s^{-\varepsilon}$, или $V(s) = \frac{s^{-\varepsilon}}{s^\gamma + \lambda}$. Воспользовавшись формулой

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(-at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a}.$$

Возвращаясь к исходной функции $g(x, t)$, получим $g(t-x) = (t-x)^{\varepsilon+\gamma-1} E_{\gamma, \varepsilon+\gamma}(-\lambda(t-x)^\gamma)$. Следовательно, возвращаясь к (2.1.5), получим

$$\begin{aligned} G(x) + \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_x^\infty u(t)(t-x)^{\varepsilon-1} dt = \\ = \int_x^\infty (t-x)^{\varepsilon+\gamma-1} E_{\gamma, \varepsilon+\gamma}(-\lambda(t-x)^\gamma) f(t) dt \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Подействуем обратным оператором на (2.1.8), тогда

$$\begin{aligned} D_{\infty t}^{\varepsilon} D_{\infty t}^{-\varepsilon} u(x) &= u(x) \\ D_{\infty t}^{\varepsilon} G(x) + u(x) &= I(x) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(-\frac{d}{dx} \right) \int_x^{\infty} f(t) \cdot \\ &\cdot \left[\int_x^t \frac{1}{(\tau-x)^{\varepsilon}} (t-\tau)^{\varepsilon+\gamma-1} E_{\gamma, \gamma+\varepsilon}(-\lambda(t-\tau)^{\gamma}) d\tau \right] dt. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Посчитаем внутренний интеграл (2.1.9).

$$J(t, x) = \int_x^t \frac{(t-\tau)^{\varepsilon+\gamma-1}}{(\tau-x)^{\varepsilon}} E_{\gamma, \gamma+\varepsilon}(-\lambda(t-\tau)^{\gamma}) d\tau, \quad t > x.$$

Положим $s = t - \tau \Rightarrow \tau = t - s, d\tau = -ds, \tau = x \Leftrightarrow s = t - x, \tau = t \Leftrightarrow s = 0$. Тогда

$$J(t, x) = \int_0^{t-x} (t-x-s)^{-\varepsilon} s^{\varepsilon+\gamma-1} E_{\gamma, \gamma+\varepsilon}(-\lambda s^{\gamma}) ds.$$

Обозначим $a := t - x, \alpha := \varepsilon + \gamma > 0, \beta := 1 - \varepsilon > 0$. Далее фиксируем параметр ε так, что $1 - \gamma < \varepsilon < 1$. Интеграл принимает вид

$$J(t, x) = \int_0^a (a-s)^{\beta-1} s^{\alpha-1} E_{\gamma, \gamma+\varepsilon}(-\lambda s^{\gamma}) ds \quad (2.1.10)$$

Используя формулу (4.4.5) из [58]

$$\int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{\alpha-1} E_{\rho, \mu}(as^{\rho}) ds = \Gamma(\beta) t^{\alpha+\beta-1} E_{\rho, \mu+\beta}(at^{\rho}),$$

Имея, $\rho = \gamma, \mu = \gamma + \varepsilon, a = -\lambda, t = a = t - x$, мы получим

$$J(t, x) = \Gamma(\beta) (t-x)^{\alpha+\beta-1} E_{\gamma, \gamma+\varepsilon+\beta}(-\lambda(t-x)^{\gamma}).$$

Однако, имеем, что $\alpha + \beta - 1 = (\varepsilon + \gamma) + (1 - \varepsilon) - 1 = \gamma, \gamma + \varepsilon + \beta = \gamma + \varepsilon + (1 - \varepsilon) = \gamma + 1$. Следовательно, получим из (2.1.10) $J(t, x) = \Gamma(1 - \varepsilon) (t - x)^{\gamma} E_{\gamma, \gamma+1}(-\lambda(t-x)^{\gamma})$. Теперь продифференцируем по правилу Лейбница и воспользовавшись формулой (4.3.6) из [58] получим,

$$I(x) = \int_x^\infty f(t)(t-x)^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}(-\lambda(t-x)^\gamma) dt.$$

Соответственно (2.1.8) примет вид:

$$u(x) = \int_x^\infty f(s)(s-x)^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}(-\lambda(s-x)^\gamma) ds - D_{\infty x}^\varepsilon G(x) \quad (2.1.11)$$

Проанализируем $G(x)$ в (2.1.11)

$$\begin{aligned} G(x) &= -[g(t-x)D_{\infty t}^{\gamma-1}u(t)]_{t=x}^{t=\infty}, \\ g(t-x) &= (t-x)^{\varepsilon+\gamma-1} E_{\gamma,\varepsilon+\gamma}(-\lambda(t-x)^\gamma), \quad 0 < \gamma < 1. \end{aligned}$$

Известно, что

$$\begin{aligned} D_{\infty t}^\gamma u(t) &= -\frac{d}{dt}(D_{\infty t}^{\gamma-1}u(t)), \\ D_{\infty t}^{\gamma-1}u(t) &= I_{\infty t}^{1-\gamma}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_t^\infty \frac{u(\tau)}{(\tau-t)^\gamma} d\tau \end{aligned}$$

получим:

$$\begin{aligned} G(x) &= -[g(t-x)I_{\infty t}^{1-\gamma}u(t)]_{t=x}^{t=\infty} = \\ &= -\lim_{t \rightarrow \infty} g(t-x)I_{\infty t}^{1-\gamma}u(t) + \lim_{t \rightarrow x^+} g(t-x)I_{\infty t}^{1-\gamma}u(t). \end{aligned}$$

Положим $z = t - x > 0$ и $w = -\lambda z^\gamma$. Тогда $|w| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ и $\arg w = \arg(-\lambda)$. Предположим, что $|\arg(-\lambda)| > \frac{\pi\gamma}{2}$. Тогда можно выбрать число θ так, что $\frac{\pi\gamma}{2} < \theta < \pi\gamma$ и $\theta \leq |\arg(-\lambda)| \leq \pi$. По лемме [17] (случай 2, формула (2.24)) для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо асимптотическое разложение $E_{\gamma,\beta}(w) = -\sum_{k=1}^m \frac{w^{-k}}{\Gamma(\beta-\gamma k)} + O(|w|^{-m-1})$, $|w| \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$E_{\gamma,\beta}(-\lambda z^\gamma) = -\sum_{k=1}^m \frac{(-\lambda)^{-k}}{\Gamma(\beta-\gamma k)} z^{-\gamma k} + O(z^{-\gamma(m+1)}), \quad z \rightarrow +\infty. \quad (2.1.12)$$

Подставляя $z = t - x$ в (2.1.12), главный член $E_{\gamma,\varepsilon+\gamma} \sim [(t-x)^{-\gamma}]/[\lambda\Gamma(\varepsilon)]$. Поэтому $g(t-x) = O((t-x)^{\varepsilon-1})$, $t \rightarrow \infty$. Если функция u убывает не медленнее, чем $u(\tau) = O(\tau^{-\delta})$ при $\delta > 0$, тогда $I_{\infty t}^{1-\gamma}u(t) = O(t^{-\delta+1-\gamma})$, $t \rightarrow \infty$. Поэтому $g(t-x)I_{\infty t}^{1-\gamma}u(t) = O(t^{-\delta+\varepsilon-\gamma})$, $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю, если

$$\delta > \varepsilon - \gamma \quad (2.1.13)$$

Любая допустимая функция u , обращающаяся в нуль на бесконечности, на практике удовлетворяет (2.1.13), поэтому первый граничный вклад обращается в нуль $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t-x)I_{\infty t}^{1-\gamma} u(t) = 0$. Вблизи нуля ряд Миттаг-Леффлера сводится к своему первому члену: $E_{\gamma, \varepsilon+\gamma}(-\lambda s^\gamma) = 1/\Gamma(\varepsilon + \gamma) + O(s^\gamma), s \rightarrow 0^+$. Отсюда $g(s) = \frac{s^{\varepsilon+\gamma-1}}{\Gamma(\varepsilon+\gamma)} [1 + O(s^\gamma)], s \rightarrow 0^+$. Дробный интеграл $I_{+\infty}^{1-\gamma} u(t)$ непрерывен в точке $t = x$, поскольку его ядро абсолютно интегрируемо $I_{\infty t}^{1-\gamma} u(t) = I_{\infty x}^{1-\gamma} u(x) + O(s), s \rightarrow 0^+$. Таким образом,

$$g(s)I_{\infty t}^{1-\gamma} u(t) = \frac{I_{\infty x}^{1-\gamma} u(x)}{\Gamma(\varepsilon + \gamma)} s^{\varepsilon+\gamma-1} [1 + O(s^\gamma)].$$

Данное произведение стремится к:

- нулю, если $\varepsilon + \gamma > 1$;
- конечному ненулевому пределу, пропорциональному $I_{\infty x}^{1-\gamma} u(x)$, если $\varepsilon + \gamma = 1$
- расходится, если $\varepsilon + \gamma < 1$.

Следовательно, второй граничный вклад обращается в нуль в точности тогда, когда

$$\varepsilon > 1 - \gamma \quad (2.1.14)$$

Объединяя результаты анализа (обоих) граничных вкладов, получаем:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{если выполнены оба условия (2.1.13) и (2.1.14);} \\ \frac{I_{\infty x}^{1-\gamma} u(x)}{\Gamma(\varepsilon + \gamma)}, & \text{если } \varepsilon + \gamma = 1 \text{ и (2.1.13) выполнено;} \\ \text{не определено или расходится,} & \text{если } \varepsilon + \gamma < 1. \end{cases}$$

При условии, что $\varepsilon > 1 - \gamma$ и $u(t) = o(t^{-(\varepsilon-\gamma)}) (t \rightarrow \infty)$ оба граничных вклада обращаются в нуль, следовательно $G(x) = 0$. В противном случае необходимо сохранять или регуляризовать ненулевой граничный член.

Откуда получаем, что

$$u(x) = \int_x^\infty f(s)(s-x)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda(s-x)^\gamma) ds. \quad (2.1.15)$$

Получив представление решения, а также функцию Грина, выпишем все шаги детальнее.

Определение 2.1.1. Будем называть функцию $u(t)$ регулярным решением уравнения (2.1.1), где $D_{\infty t}^{\gamma} u(t)$ определяется как (2.1.2), если:

1. $u(t) \in C(0, \infty)$;
2. $\forall r > 0$ выполнено $u(r+t)t^{-\gamma} \in L(0, \infty)$ и $D_{rt}^{\gamma-1} u(t) \in AC[0, r]$;
3. $D_{\infty t}^{\gamma-1} u(t) \in C^1(0, \infty)$;
4. $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1.1) при $t > 0$.

Задача 2.1.1. Найти регулярное решение уравнения (2.1.1), удовлетворяющее условию:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\delta} u(t) = 0, \quad \delta > \max\{\gamma, 1 - \gamma\}. \quad (2.1.16)$$

Сначала решим однородное уравнение (2.1.1). Если $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 < \gamma < 1$ однородное уравнение

$$D_{\infty t}^{\gamma} u(t) + \lambda u(t) = 0 \quad (2.1.17)$$

имеет ненулевые решения вида:

$$u(t) = C e^{-\omega t} \quad (2.1.18)$$

где $\omega^{\gamma} = -\lambda$, $C = \text{const}$. Здесь выбрана однозначная ветвь функции

$$\omega^{\gamma} = |\omega|^{\gamma} \exp(i\gamma \arg \omega), \quad \arg \omega \in (-\pi, \pi].$$

Но для того, чтобы (2.1.18) являлась решением уравнение (2.1.17) необходимо $\text{Re} \omega > 0$, то есть $|\arg \omega| < \frac{\pi}{2}$, а это в свою очередь означает, что $(-\lambda) \in D_{\gamma}$, где

$$D_{\gamma} = \left\{ z: |\arg z| < \frac{\gamma\pi}{2} \right\}.$$

Следовательно, однородное уравнение (2.1.17) имеет ненулевые решения, лишь при условии $(-\lambda) \in D_{\gamma}$. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1.1. Пусть $(-\lambda) \notin \overline{D_{\gamma}}$, $0 < \gamma < 1$. Тогда однородное уравнение (2.1.17) имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$.

Теорема 2.1.1. Пусть $f(t) \in L(0, \infty)$, $(-\lambda) \notin \overline{D_{\gamma}}$, $0 < \gamma < 1$. Тогда **Задача 2.1.1** имеет единственное регулярное решение, которое представимо в виде:

$$u(t) = \int_t^{\infty} f(s)(s-t)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda(s-t)^{\gamma}) ds$$

где $E_{\gamma,\gamma}(z)$ – функция Миттаг-Леффлера, $D_\gamma = \{z: |\arg z| < \gamma\pi/2\}$.

Доказательство. Построим решение уравнения (2.1.1) с помощью метода Грина. Умножим обе части исходного уравнения на функцию, которую нашли ранее

$$g(t, s) = (s - t)^\gamma E_{\gamma,\gamma+1}(-\lambda(s - t)^\gamma), \quad (2.1.19)$$

и проинтегрируем. Необходимо рассмотреть интеграл в пределах от t до R , то есть:

$$\int_t^R g(t, s) [D_{\infty t}^\gamma u(s) + \lambda u(s)] ds. \quad (2.1.20)$$

Далее, в (2.1.20), слагаемое $D_{\infty s}^\gamma u(s)$ представим в виде суммы: $D_{\infty s}^\gamma u(s) = D_{Rs}^\gamma u(s) + J_s^\gamma u(s)$, где

$$J_s^\gamma u(s) = \left(-\frac{d}{ds}\right) \int_R^\infty \frac{(\xi - s)^{-\gamma}}{\Gamma(1 - \gamma)} u(\xi) d\xi = \int_R^\infty \frac{(\xi - s)^{-\gamma-1}}{\Gamma(-\gamma)} u(\xi) d\xi.$$

Теперь наше соотношение (2.1.20) перепишется в виде

$$\int_t^R g(t, s) [D_{Rs}^\gamma u(s) + \lambda u(s)] ds + \int_t^R g(t, s) J_s^\gamma u(s) ds.$$

Покажем, что $\int_t^R g(t, s) J_s^\gamma u(s) ds \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

Рассмотрим функцию (2.1.19). Пусть $\lambda \neq 0$ и $|\arg(-\lambda)| > \frac{\pi\gamma}{2}$. Тогда при $|z| \rightarrow \infty$ и $|\arg z| = |\arg(-\lambda)|$ справедлива асимптотика, которую мы показали ранее $E_{\gamma,\gamma+1}(z) = -\frac{1}{z} + O(|z|^{-2})$ и потому

$$g(t, s) = \frac{1}{\lambda} + O((s - t)^{-\gamma}), s \rightarrow \infty.$$

В частности, $|g(t, s)| \leq C_g$ при $s \geq t$. Рассмотрим оператор $J_s^\gamma u(s)$:

$$J_s^\gamma u(s) = \int_R^\infty \frac{(\xi - s)^{-\gamma-1}}{\Gamma(-\gamma)} u(\xi) d\xi.$$

Оценим оператор $J_s^\gamma u(s)$, для фиксированного s , при $R \rightarrow \infty$, интеграл берётся на интервале $[R, \infty)$, который сдвигается вправо. Далее, ввиду условий регулярного решения $u(\xi)$, получаем:

$$|J_s^\gamma u(s)| \leq \frac{C}{|\Gamma(-\gamma)|} \int_R^\infty (\xi - s)^{-\gamma-1} \xi^{-\delta} d\xi.$$

Далее имеем,

$$\int_R^\infty \frac{d\xi}{(\xi - s)^{\gamma+1} \xi^\delta} \leq \frac{1}{R^\delta} \int_R^\infty \frac{d\xi}{(\xi - s)^{\gamma+1}} = \frac{1}{\gamma R^\delta (R - s)^\gamma} \rightarrow 0, \text{ при } R \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\lim_{R \rightarrow \infty} J_s^\gamma u(s) = 0$, получим $|g(t, s)| \leq C_g$. Имеем оценку

$$\left| \int_t^R g(t, s) J_s^\gamma u(s) ds \right| \leq \int_t^R |g(t, s)| |J_s^\gamma u(s)| ds.$$

При $s \in [t, R]$ и больших R из условия убывания $|u(\xi)| \leq C \xi^{-\delta}$ получаем

$$\begin{aligned} |J_s^\gamma u(s)| &\leq \frac{C}{|\Gamma(-\gamma)|} \int_R^\infty \frac{d\xi}{(\xi - s)^{\gamma+1} \xi^\delta} \leq \frac{C}{|\Gamma(-\gamma)|} \frac{1}{R^\delta} \int_R^\infty (\xi - s)^{-\gamma-1} d\xi \\ &= \frac{C}{|\Gamma(-\gamma)|} \frac{1}{\gamma R^\delta (R - s)^\gamma}. \end{aligned}$$

Поскольку $|g(t, s)| \leq C_g$, получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_t^R g(t, s) J_s^\gamma u(s) ds \right| &\leq \frac{C_g C}{|\Gamma(-\gamma)| \gamma R^\delta} \int_t^R (R - s)^{-\gamma} ds \\ &= \frac{C_g C}{|\Gamma(-\gamma)| \gamma (1 - \gamma)} \frac{(R - t)^{1-\gamma}}{R^\delta} \leq \frac{M_{\gamma, g}}{R^{\delta+\gamma-1}} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

если $\delta > 1 - \gamma$.

Интеграл $\int_t^R g(t, s) J_s^\gamma u(s) ds$ стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Значит:

$$\int_t^\infty g(t, s) [D_{\infty t}^\gamma u(s) + \lambda u(s)] ds = \int_t^\infty g(t, s) f(s) ds.$$

Рассмотрим левую часть полученного уравнения:

$$\begin{aligned} \int_t^\infty g(t, s) \left(-\frac{d}{ds} \right) D_{\infty t}^{\gamma-1} u(s) ds &= -g(t, s) D_{\infty t}^{\gamma-1} u(s) \Big|_{s=t}^{s=\infty} \\ &+ \int_t^\infty \frac{\partial}{\partial s} g(t, s) D_{\infty t}^{\gamma-1} u(s) ds \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Во втором слагаемом (2.1.21) применим интегрирование по частям для дробного интеграла, получим:

$$G(t) + \int_t^\infty u(s)[\partial_{ts}^\gamma g(t,s) + \lambda g(t,s)]ds = \int_t^\infty g(t,s)f(s)ds, \quad (2.1.22)$$

где $G(t) = -g(t,s)D_{\infty t}^{\gamma-1}u(s)|_{s=t}^{s=\infty}$. С учётом определения функции $g(t,s)$ из (2.1.19) имеем: $\partial_{ts}^\gamma g(t,s) + \lambda g(t,s) = 1$. Следовательно, уравнение (2.1.22) примет следующий вид:

$$G(t) + \int_t^\infty u(s)ds = \int_t^\infty (s-t)^\gamma E_{\gamma,\gamma+1}(-\lambda(s-t)^\gamma)f(s)ds$$

Далее дифференцируем обе части полученного уравнения по t :

$$u(t) = \int_t^\infty f(s)(s-t)^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}(-\lambda(s-t)^\gamma)ds + G'(t)$$

Принимая во внимание условия регулярного решения, а также асимптотическое поведения функции Миттаг-Леффлера, получаем, что $G'(t) = 0$, поэтому окончательное представление решения имеет вид:

$$u(t) = \int_t^\infty f(s)(s-t)^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}(-\lambda(s-t)^\gamma)ds$$

Теорема 2.1.2. Пусть $(-\lambda) \notin \overline{D_\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, где $D_\gamma = \{z: |\arg z| < \frac{\gamma\pi}{2}\}$. Тогда **Задача 2.1.1.** имеет не более одного решения.

Доказательство. Пусть $u_1(t), u_2(t)$ - два решения уравнения (2.1.1) и $u_1(t) \neq u_2(t)$. Тогда их разность

$$v(t) = u_1(t) - u_2(t),$$

должна удовлетворять однородному уравнению (2.1.17). Ввиду **Леммы 2.1.1**, функция $v(t) = 0$, отсюда $u_1(t) = u_2(t)$.

Теорема 2.1.3. Пусть $|f(t)| \leq Ct^{-\alpha}$, $\alpha > \delta$, $(-\lambda) \notin \overline{D_\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, где $D_\gamma = \{z: |\arg z| < \frac{\gamma\pi}{2}\}$. Тогда функция $u(t)$, представимая в виде (2.1.15), является регулярным решением **Задачи 2.1.1.**

Доказательство. Докажем существование решения уравнения (2.1.1) в виде представления (2.1.15) для этого покажем, что оно действительно удовлетворяет исходному уравнению.

Подставим выражение для $u(t)$ из (2.1.15) в левую часть уравнения (2.1.1):

$$D_{\infty t}^{\gamma} u(t) + \lambda u(t) = D_{\infty t}^{\gamma} \int_t^{\infty} f(s)(s-t)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda(s-t)^{\gamma}) ds + \quad (2.1.23)$$

$$+ \lambda \int_t^{\infty} f(s)(s-t)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda(s-t)^{\gamma}) ds.$$

Рассмотрим первое слагаемое (2.1.23):

$$D_{\infty t}^{\gamma} \int_t^{\infty} f(s)(s-t)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda(s-t)^{\gamma}) ds$$

$$= -\frac{d}{dt} D_{\infty t}^{\gamma-1} \int_t^{\infty} f(s)(s-t)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda(s-t)^{\gamma}) ds =$$

$$= -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_t^{\infty} \frac{1}{(\xi-t)^{\gamma}} \int_{\xi}^{\infty} f(s)(s-\xi)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda(s-\xi)^{\gamma}) ds d\xi \right) =$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_t^{\infty} f(s) \left[\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_t^s \frac{(s-\xi)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda(s-\xi)^{\gamma})}{(\xi-t)^{\gamma}} d\xi \right] ds =$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_t^{\infty} f(s) \left[\frac{\eta^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} * \eta^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda\eta^{\gamma}) \right] ds =$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_t^{\infty} f(s) E_{\gamma, 1}(-\lambda(s-t)^{\gamma}) ds.$$

Используя свойство производной функции Миттаг-Леффлера: $\frac{d}{dz} E_{\gamma, 1}(z) = \frac{1}{\gamma} E_{\gamma, \gamma}(z)$, получаем:

$$\int_t^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(-f(s) E_{\gamma, 1}(-\lambda(s-t)^{\gamma}) \right) ds = -\lambda \int_t^{\infty} f(s)(s-t)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda(s-t)^{\gamma}) ds.$$

Отсюда, приходим к

$$-\frac{d}{dt} \int_t^{\infty} f(s) E_{\gamma, 1}(-\lambda(s-t)^{\gamma}) ds$$

$$= - \left(-f(t) + \lambda \int_t^{\infty} f(s)(s-t)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda(s-t)^{\gamma}) ds \right).$$

Тогда имеем:

$$D_{\infty t}^{\gamma} u(t) = f(t) - \lambda \int_t^{\infty} f(s)(s-t)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda(s-t)^{\gamma}) ds.$$

Таким образом, левая часть уравнения (2.1.23) становится:

$$D_{\infty t}^{\gamma} u(t) + \lambda u(t) = f(t) - \lambda \int_t^{\infty} f(s)(s-t)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda(s-t)^{\gamma}) ds + \\ + \lambda \int_t^{\infty} f(s)(s-t)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda(s-t)^{\gamma}) ds = f(t).$$

Следовательно, подстановка представления решения (2.1.15) в исходное уравнение (2.1.1) приводит к тождеству, то есть решение действительно существует.

2.2 Функция Грина для оператора диффузии с началом в бесконечности

Задача 2.2.1. Рассмотрим область

$$Q = \{(x, t): x > 0, t > 0\}$$

и линейный оператор

$$\mathbf{M}[u](x, t) := D_{\infty t}^{\gamma} u(x, t) - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < \gamma < 1$$

Будем рассматривать граничное условие Дирихле на границе полуоси и условие убывания при $x \rightarrow \infty$:

$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.2.1)$$

Требуется найти фундаментальное решение оператора \mathbf{M} .

Определение 2.2.1. Функция $\mathcal{E}(x, t; \xi, \theta)$, $\xi > 0$, $\theta > 0$, называется фундаментальным решением оператора \mathbf{M} в области Q при условиях (2.2.1), если

$$\mathbf{M}[\mathcal{E}(\cdot, \cdot; \xi, \theta)](x, t) = \delta(x - \xi)\delta(t - \theta), \quad x > 0, t > 0, \quad (2.2.2) \\ \mathcal{E}(0, t; \xi, \theta) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{E}(x, t; \xi, \theta) = 0,$$

и $\mathcal{E}(x, t; \xi, \theta) = 0$ при $t > \theta$. Положим

$$\beta = \frac{\gamma}{2} \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (2.2.3)$$

Теорема 2.2.1. Пусть $0 < \gamma < 1$ и $\beta = \gamma/2$. Тогда фундаментальное решение (2.2.1) области Q имеет вид

$$\mathcal{E}(x, t; \xi, \theta) = H(\theta - t)\mathcal{E}(x, \xi; \theta - t) \quad (2.2.4)$$

где при $\tau > 0$

$$\mathcal{E}(x, \xi; \tau) = \frac{1}{2} [w_\beta(|x - \xi|, \tau) - w_\beta(|x + \xi|, \tau)], \quad (2.2.5)$$

функция w_β определена (1.1.35).

Доказательство. Рассмотрим уравнение (2.2.2) в развернутом виде:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_t^\infty \frac{\mathcal{E}(x, \tau; \xi, \theta)}{(\tau-t)^\gamma} d\tau - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x, t; \xi, \theta)}{\partial x^2} = \delta(x-\xi)\delta(t-\theta) \quad (2.2.6)$$

Применим синус-преобразование по x , для фиксированных t, ξ, θ . Поскольку оператор $D_{\infty t}^\gamma$ действует по переменной t , при выполнении условий, обеспечивающих перестановку интегрирования, имеем

$$\int_0^\infty D_{\infty t}^\gamma \mathcal{E}(x, t; \xi, \theta) \sin(\omega x) dx = D_{\infty t}^\gamma \tilde{\mathcal{E}}_s(\omega, t; \xi, \theta). \quad (2.2.7)$$

Вычислим синус-преобразование второй производной по x интегрированием по частям. Положим $U(x) = \mathcal{E}(x, t; \xi, \theta)$. Тогда

$$\int_0^\infty U_{xx}(x) \sin(\omega x) dx = U_x(x) \sin(\omega x)|_0^\infty - \omega \int_0^\infty U_x(x) \cos(\omega x) dx \quad (2.2.8)$$

Второй интеграл повторно проинтегрируем по частям:

$$\int_0^\infty U_x(x) \cos(\omega x) dx = U(x) \cos(\omega x)|_0^\infty + \omega \int_0^\infty U(x) \sin(\omega x) dx.$$

Подставляя, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty U_{xx}(x) \sin(\omega x) dx \\ = U_x(x) \sin(\omega x)|_0^\infty - \omega U(x) \cos(\omega x)|_0^\infty - \omega^2 \int_0^\infty U(x) \sin(\omega x) dx \end{aligned}$$

Из граничных условий (2.2.1) следует $U(0) = 0$, а также убывание $U(x)$ и $U_x(x)$ при $x \rightarrow \infty$, поэтому граничные члены равны нулю, и

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2}(x, t; \xi, \theta) \sin(\omega x) dx = -\omega^2 \tilde{\mathcal{E}}_s(\omega, t; \xi, \theta). \quad (2.2.9)$$

Кроме того, при $\xi > 0$ имеем

$$\int_0^{\infty} \delta(x - \xi) \sin(\omega x) dx = \sin(\omega \xi) \quad (2.2.10)$$

Применяя синус-преобразование к (2.2.6) и используя (2.2.9)-(2.2.10), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение по t :

$$D_{\infty t}^{\gamma} \tilde{\mathcal{E}}_s(\omega, t; \xi, \theta) + \omega^2 \tilde{\mathcal{E}}_s(\omega, t; \xi, \theta) = \sin(\omega \xi) \delta(t - \theta) \quad (2.2.11)$$

Рассмотрим уравнение

$$D_{\infty t}^{\gamma} y(t) + \omega^2 y(t) = \varphi(t), \quad 0 < \gamma < 1 \quad (2.2.12)$$

в классе функций, удовлетворяющих условию $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда используя результаты, полученные в Главе 2.1, имеем

$$y(t) = \int_t^{\infty} (\sigma - t)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\omega^2(\sigma - t)^{\gamma}) \varphi(\sigma) d\sigma. \quad (2.2.13)$$

Подставляя в (2.2.13) $\varphi(\sigma) = \sin(\omega \xi) \delta(\sigma - \theta)$, получаем

$$\tilde{\mathcal{E}}_s(\omega, t; \xi, \theta) = \sin(\omega \xi) \int_t^{\infty} (\sigma - t)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\omega^2(\sigma - t)^{\gamma}) \delta(\sigma - \theta) d\sigma.$$

Используя свойство дельта-функции (1.1.11),

$$\int_t^{\infty} F(\sigma) \delta(\sigma - \theta) d\sigma = \begin{cases} F(\theta), & t < \theta \\ 0, & t > \theta \end{cases}$$

Получаем

$$\tilde{\mathcal{E}}_s(\omega, t; \xi, \theta) = H(\theta - t) (\theta - t)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\omega^2(\theta - t)^{\gamma}) \sin(\omega \xi). \quad (2.2.14)$$

Подставляя (2.2.14), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t; \xi, \theta) &= \frac{2}{\pi} H(\theta - t) (\theta - t)^{\gamma-1} \cdot \\ &\cdot \int_0^{\infty} E_{\gamma, \gamma}(-\omega^2(\theta - t)^{\gamma}) \sin(\omega \xi) \sin(\omega x) d\omega. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Положим $\tau = \theta - t$, $\tau > 0$. Перепишем интеграл:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t; \xi, \theta) &= \frac{H(\tau)}{\pi} \tau^{\gamma-1} \cdot \\ &\cdot \int_0^\infty E_{\gamma, \gamma}(-\omega^2 \tau^\gamma) [\cos(\omega(x - \xi)) - \cos(\omega(x + \xi))] d\omega. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Так как \cos - чётная функция, можно заменить $x \pm \xi$ на $|x \pm \xi|$. С учётом (2.2.3) имеем $\gamma = 2\beta$ и $\tau^\gamma = \tau^{2\beta}$. В (2.2.16) выполним замену переменной $\eta = \omega \tau^\beta$, $\omega = \frac{\eta}{\tau^\beta}$, $d\omega = \tau^{-\beta} d\eta$. Тогда $\tau^{\gamma-1} d\omega = \tau^{2\beta-1} \tau^{-\beta} d\eta = \tau^{\beta-1} d\eta$, $E_{\gamma, \gamma}(-\omega^2 \tau^\gamma) = E_{2\beta, 2\beta}(-\eta^2)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t; \xi, \theta) &= \frac{H(\tau)}{\pi} \tau^{\beta-1} \cdot \\ &\cdot \int_0^\infty E_{2\beta, 2\beta}(-\eta^2) \left[\cos\left(\eta \frac{|x - \xi|}{\tau^\beta}\right) - \cos\left(\eta \frac{|x + \xi|}{\tau^\beta}\right) \right] d\eta. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Используем формулу [71-72]:

$$\int_0^\infty E_{2\beta, 2\beta}(-\eta^2) \cos(\eta z) d\eta = \frac{\pi}{2} \phi(-\beta, \beta; -|z|), \quad z \in \mathbb{R}, 0 < \beta < 1. \quad (2.2.18)$$

Применяя (2.2.18) к (2.2.17) с $z = |x \pm \xi|/\tau^\beta$, получаем

$$\mathcal{E}(x, t; \xi, \theta) = \frac{H(\tau)}{2} \tau^{\beta-1} \left[\phi\left(-\beta, \beta; -\frac{|x - \xi|}{\tau^\beta}\right) - \phi\left(-\beta, \beta; -\frac{|x + \xi|}{\tau^\beta}\right) \right]. \quad (2.2.19)$$

По определению (1.1.35) из 2.2.19 следует

$$\mathcal{E}(x, t; \xi, \theta) = H(\theta - t) \frac{1}{2} [w_\beta(|x - \xi|, \theta - t) - w_\beta(|x + \xi|, \theta - t)].$$

2.3 Функция Грина для оператора диффузии с переменным началом

В этом подразделе строится функция Грина первой краевой задачи в треугольной области

$$Q = \{(x, t): 0 < x < t < \infty\}. \quad (2.3.1)$$

Предполагается, что

$$0 < \alpha < 1, a > 0, \nu = \frac{\alpha}{2} \quad (2.3.2)$$

Тогда $0 < \nu < 1/2$. Рассматривается задача

$$D_{xt}^\alpha u(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t), (x, t) \in Q, \quad (2.3.3)$$

$$u(0, t) = 0, t > 0, \quad (2.3.4)$$

$$u(x, x) = 0, x > 0. \quad (2.3.5)$$

Определение 2.3.1. Пусть $T > 0$ и $Q_T = \{(x, t): 0 < x < t < T\}$. Функция u называется регулярным решением задачи (2.3.3)-(2.3.5) в области Q_T , если $u \in C(\bar{Q}_T)$, производные $u_x, u_{xx}, D_{xt}^\alpha u$ существуют в Q_T , уравнение (2.3.3) выполняется поточечно в Q_T , а на границе области выполнены условия $u(0, t) = 0, 0 < t < T, u(x, x) = 0, 0 < x < T$. Кроме того, существует односторонний след

$$\mu(x) = u_x(x, x + 0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} u_x(x, x + \varepsilon), \quad (2.3.6)$$

и функция μ локально непрерывна по $x > 0$. Оператор D_{xt}^α удобно рассматривать как оператор D_{0t}^α , действующий на продолжение решения нулём в область $0 < t < x$.

Положим

$$U(x, t) = H(t - x)u(x, t), x > 0, t > 0 \quad (2.3.7)$$

Лемма 2.3.1. Пусть u является регулярным решением и U задана формулой (2.3.7). Тогда в смысле обобщённых функций в полуплоскости $x > 0, t > 0$ справедливы равенства

$$D_{0t}^\alpha U = H(t - x)D_{xt}^\alpha u \quad (2.3.8)$$

$$U_{xx} = H(t - x)u_{xx} - u_x(x, x + 0)\delta(t - x) \quad (2.3.9)$$

Следовательно,

$$(D_{0t}^\alpha - a^2 \partial_{xx})U = H(t - x)f(x, t) + a^2 \mu(x)\delta(t - x) \quad (2.3.10)$$

где μ задана равенством (2.3.6).

Доказательство. Для дробного интеграла имеем

$$\begin{aligned} I_{0t}^{1-\alpha} U(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} H(s-x)u(x, s)ds \\ &= H(t-x) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^t (t-s)^{-\alpha} u(x, s)ds \end{aligned}$$

Величина после множителя $H(t - x)$ обращается в нуль при $t = x + 0$, поэтому при дифференцировании по t дельта-слагаемое на прямой $t = x$ не возникает. Это даёт (2.3.8). Далее $U_x = H(t - x)u_x - \delta(t - x)u(x, x) = H(t - x)u_x$, так как $u(x, x) = 0$. Повторное дифференцирование по x даёт $U_{xx} = H(t - x)u_{xx} - \delta(t - x)u_x(x, x + 0)$, что совпадает с (2.3.9). Формула (2.3.10) получается подстановкой (2.3.8) и (2.3.9) в уравнение (2.3.3).

Для контроля знаков полезно записать задачу в переменных $s = t - x$, $v(x, s) = u(x, x + s)$, $F(x, s) = f(x, x + s)$. Тогда Q переходит в четверть $x > 0, s > 0$.

Лемма 2.3.2. В области $x > 0, s > 0$ справедливы соотношения $D_{xt}^\alpha u(x, x + s) = D_{0s}^\alpha v(x, s)$, $u_{xx}(x, x + s) = v_{xx}(x, s) - 2v_{xs}(x, s) + v_{ss}(x, s)$.

Условия (2.3.4), (2.3.5) переходят в $v(0, s) = 0, v(x, 0) = 0$. Следовательно, $D_{0s}^\alpha v - a^2(v_{xx} - 2v_{xs} + v_{ss}) = F(x, s), x > 0, s > 0$. Если обозначить $\mu(x) = u_x(x, x + 0)$, то из $v(x, 0) = 0$ следует $v_x(x, 0) = 0$, и поэтому $v_s(x, 0) = -\mu(x)$.

После преобразования Лапласа по s получаем $p^\alpha \bar{v} - a^2(\bar{v}_{xx} - 2p\bar{v}_x + p^2\bar{v}) = \bar{F}(x, p) + a^2\mu(x)$, что согласуется с диагональным источником в (2.3.10).

Вспомогательная функция Грина в полуплоскости

Рассмотрим оператор $L_0 = D_{0t}^\alpha - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, x > 0, t > 0$ с условием Дирихле при $x = 0$. Определим

$$\Gamma(x, t; \xi, \tau) = \frac{H(t - \tau)}{2a} \left[w_\nu \left(\frac{|x - \xi|}{a}, t - \tau \right) - w_\nu \left(\frac{x + \xi}{a}, t - \tau \right) \right]. \quad (2.3.11)$$

Лемма 2.3.3. Функция (2.3.11) является функцией Грина для оператора L_0 на полуоси $x > 0$ с нулевым условием Дирихле:

$$(D_{0t}^\alpha - a^2 \partial_{xx}) \Gamma(x, t; \xi, \tau) = \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \quad (2.3.12)$$

в $\mathcal{D}'(\{x > 0, t > 0\})$, и

$$\Gamma(0, t; \xi, \tau) = 0 \quad (2.3.13)$$

Доказательство. Преобразование Лапласа по t даёт

$$\hat{\Gamma}(x, p; \xi, \tau) = \frac{e^{-p\tau}}{2ap^\nu} \left[e^{-\frac{|x-\xi|p^\nu}{a}} - e^{-\frac{(x+\xi)p^\nu}{a}} \right] \quad (2.3.14)$$

Обозначая $\kappa = p^\nu/a$, имеем $p^\alpha = a^2\kappa^2$. Вне точки $x = \xi$ функция (2.3.14) удовлетворяет однородному уравнению $(p^\alpha - a^2 \frac{d^2}{dx^2}) \hat{\Gamma} = 0$. Скачок производной в точке $x = \xi$ создаёт только слагаемое $e^{-\kappa|x-\xi|}$, причём $\left[\frac{d}{dx} \frac{1}{2ap^\nu} e^{-\kappa|x-\xi|} \right]_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = -\frac{1}{a^2}$. Следовательно, $(p^\alpha - a^2 \frac{d^2}{dx^2}) \hat{\Gamma} = e^{-p\tau} \delta(x - \xi)$.

После обратного преобразования Лапласа получаем (2.3.12). При $x = 0$ два слагаемых в квадратных скобках в (2.3.11) совпадают, поэтому (2.3.13) выполнено.

Диагональный потенциал

Пусть $\rho \in C_{\text{loc}} [0, \infty)$. Диагональным потенциалом с плотностью ρ называется функция $(\mathcal{P}\rho)(x, t) = a^2 \int_0^t \Gamma(x, t; \eta, \eta) \rho(\eta) d\eta$. Интеграл локально сходится при локально ограниченной плотности ρ . Действительно, пусть (x, t) принадлежит фиксированному компактному. Если $x \neq t$, то при $\eta \rightarrow t - 0$ первый аргумент функции w_ν равномерно ограничен снизу положительной постоянной, а второй стремится к нулю. Поэтому по асимптотике функции Райта ядро $\Gamma(x, t; \eta, \eta)$ убывает быстрее любой степени $t - \eta$. Если же $x = t$, то $\Gamma(t, t; \eta, \eta) = \frac{1}{2a} w_\nu \left(\frac{t-\eta}{a}, t - \eta \right) + O \left(e^{-c(t-\eta)^{-\nu/(1-\nu)}} \right), \eta \rightarrow t - 0$. Из ряда функции Райта следует $w_\nu \left(\frac{t-\eta}{a}, t - \eta \right) = \frac{(t-\eta)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} + O((t-\eta)^{1-\nu})$. Следовательно, $\Gamma(t, t; \eta, \eta) = O((t-\eta)^{\nu-1}), \eta \rightarrow t - 0$. Так как $0 < \nu < 1$, особенность $(t-\eta)^{\nu-1}$ интегрируема. Отсюда следует локальная сходимость диагонального потенциала.

Лемма 2.3.4. В смысле обобщенных функций в полуплоскости $x > 0, t > 0$ имеем $L_0(\mathcal{P}\rho) = a^2 \rho(x) \delta(t - x)$ и $(\mathcal{P}\rho)(0, t) = 0$.

Доказательство. Так как $\Gamma(x, t; \eta, \eta) = 0$ при $\eta > t$, потенциал можно записать в виде $(\mathcal{P}\rho)(x, t) = a^2 \int_0^\infty \Gamma(x, t; \eta, \eta) \rho(\eta) d\eta$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\{x > 0, t > 0\})$. Тогда, используя локальную сходимость интеграла и компактность носителя φ , получаем $\langle L_0(\mathcal{P}\rho), \varphi \rangle = a^2 \int_0^\infty \rho(\eta) \langle L_0 \Gamma(x, t; \eta, \eta), \varphi(x, t) \rangle d\eta$. Так как $L_0 \Gamma(x, t; \eta, \eta) = \delta(x - \eta) \delta(t - \eta)$, то $\langle L_0(\mathcal{P}\rho), \varphi \rangle = a^2 \int_0^\infty \rho(\eta) \varphi(\eta, \eta) d\eta$. С другой стороны, $\langle a^2 \rho(x) \delta(t - x), \varphi \rangle = a^2 \int_0^\infty \rho(x) \varphi(x, x) dx$. Следовательно, $L_0(\mathcal{P}\rho) = a^2 \rho(x) \delta(t - x)$ Равенство $(\mathcal{P}\rho)(0, t) = 0$ следует из $\Gamma(0, t; \eta, \eta) = 0$.

Уравнение для диагональной плотности функции Грина

Зафиксируем точку источника $0 < \xi < \tau$. Функцию Грина исходной задачи будем искать в виде

$$G(x, t; \xi, \tau) = \Gamma(x, t; \xi, \tau) + a^2 \int_\tau^t \Gamma(x, t; \eta, \eta) \rho(\eta; \xi, \tau) d\eta, \quad (2.3.15)$$

где интеграл считается равным нулю при $t \leq \tau$, а плотность продолжается нулём:

$$\tilde{\rho}(\eta; \xi, \tau) = \begin{cases} 0, & 0 < \eta \leq \tau \\ \rho(\eta; \xi, \tau), & \eta > \tau \end{cases}. \quad (2.3.16)$$

Условие $G(x, x; \xi, \tau) = 0$ при $x > \tau$ приводит к уравнению Вольтерра первого рода

$$a^2 \int_{\tau}^x \Gamma(x, x; \eta, \eta) \rho(\eta; \xi, \tau) d\eta = -\Gamma(x, x; \xi, \tau), x > \tau. \quad (2.3.17)$$

При $0 < x \leq \tau$ условие $G(x, x; \xi, \tau) = 0$ выполнено автоматически, так как $\Gamma(x, x; \xi, \tau) = 0$, а интеграл в (2.3.15) считается равным нулю при верхнем пределе, не превосходящем нижний. Для $0 < \eta < x$ имеем

$$a^2 \Gamma(x, x; \eta, \eta) = \frac{a}{2} \left[w_\nu \left(\frac{x-\eta}{a}, x-\eta \right) - w_\nu \left(\frac{x+\eta}{a}, x-\eta \right) \right]. \quad (2.3.18)$$

На каждом треугольнике

$$\tau \leq \eta \leq x \leq T, T > \tau \quad (2.3.19)$$

главная особенность ядра при $\eta \rightarrow x - 0$ имеет вид $a^2 \Gamma(x, x; \eta, \eta) = \frac{a}{2\Gamma(\nu)} (x - \eta)^{\nu-1} + K_1(x, \eta)$, где K_1 непрерывно продолжается на треугольник (2.3.19) и $K_1(x, x) = 0$. Более точно, из ряда Райта и из асимптотики функции Райта при большом отрицательном аргументе следует, что при $\eta \rightarrow x - 0$ равномерно на (2.3.19)

$$K_1(x, \eta) = O((x - \eta)^{1-\nu}), \partial_x K_1(x, \eta) = O((x - \eta)^{-\nu}) \quad (2.3.20)$$

Действительно, $w_\nu \left(\frac{x-\eta}{a}, x-\eta \right) = \frac{(x-\eta)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} + O((x - \eta)^{1-\nu}), \eta \rightarrow x - 0$, а второе слагаемое в (2.3.18) вместе со своими производными по x убывает быстрее любой степени $x - \eta$, поскольку на треугольнике (2.3.19) величина $x + \eta$ отделена от нуля. Положим $I_{\tau x}^\nu \psi(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{\tau}^x (x - \eta)^{\nu-1} \psi(\eta) d\eta$. Тогда уравнение (2.3.17) можно переписать как

$$\frac{a}{2} I_{\tau x}^\nu \rho(x; \xi, \tau) + \int_{\tau}^x K_1(x, \eta) \rho(\eta; \xi, \tau) d\eta = -\Gamma(x, x; \xi, \tau), x > \tau. \quad (2.3.21)$$

Применяя оператор $D_{\tau x}^\nu g(x)$ получаем уравнение Вольтерра второго рода

$$\rho(x; \xi, \tau) + \frac{2}{a} \int_{\tau}^x R(x, \eta) \rho(\eta; \xi, \tau) d\eta = -\frac{2}{a} D_{\tau x}^\nu \Gamma(x, x; \xi, \tau), x > \tau, \quad (2.3.22)$$

где

$$R(x, \eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^x (x-r)^{-\nu} K_1(r, \eta) dr \quad (2.3.23)$$

Лемма 2.3.5. Для каждого $T > \tau$ ядро R непрерывно на треугольнике $\tau \leq \eta \leq x \leq T$. Более того, $R(x, \eta) = O((x - \eta)^{1-2\nu}), \eta \rightarrow x - 0$.

Доказательство. Так как $K_1(\eta, \eta) = 0$, из (2.3.23) и формулы для дробной производной функции с нулевым нижним следом следует $R(x, \eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_{\eta}^x (x-r)^{-\nu} \partial_r K_1(r, \eta) dr$. Оценка (2.3.20) даёт $|R(x, \eta)| \leq C \int_{\eta}^x (x-r)^{-\nu} (r-\eta)^{-\nu} dr = CB(1-\nu, 1-\nu)(x-\eta)^{1-2\nu}$. Поскольку $0 < \nu < 1/2$, правая часть стремится к нулю при $\eta \rightarrow x - 0$. Вне диагонали непрерывность следует из гладкости ядра K_1 ; на диагонали она следует из полученной оценки.

Лемма 2.3.6. Для каждой точки источника $0 < \xi < \tau$ и каждого $T > \tau$ уравнение (2.3.22) имеет единственное решение $\rho(\cdot; \xi, \tau) \in C[\tau, T]$. При этом (2.3.22) эквивалентно уравнению первого рода (2.3.17) на $[\tau, T]$.

Доказательство. По предыдущей лемме ядро R непрерывно на $\tau \leq \eta \leq x \leq T$. Правая часть уравнения (2.3.22) также непрерывна на $[\tau, T]$. Действительно, при $x \rightarrow \tau + 0$ величины $|x - \xi|$ и $x + \xi$ равномерно ограничены снизу, а $x - \tau \rightarrow 0 + 0$; поэтому $\Gamma(x, x; \xi, \tau)$ и её дробная производная $D_{tx}^{\nu} \Gamma(x, x; \xi, \tau)$ убывают быстрее любой степени $x - \tau$. Следовательно, (2.3.22) является обычным уравнением Вольтерра второго рода с непрерывным ядром. По методу последовательных приближений оно имеет единственное непрерывное решение на $[\tau, T]$.

Покажем эквивалентность. Если выполнено (2.3.21), то применение D_{tx}^{ν} даёт (2.3.22), поскольку $D_{tx}^{\nu} I_{tx}^{\nu} \rho = \rho$ и $D_{tx}^{\nu} \int_{\tau}^x K_1(x, \eta) \rho(\eta) d\eta = \int_{\tau}^x R(x, \eta) \rho(\eta) d\eta$

Последнее равенство получается перестановкой порядка интегрирования в дробном интеграле. Обратно, пусть выполнено (2.3.22). Положим $q(x) = \Gamma(x, x; \xi, \tau)$, $h(x) = \int_{\tau}^x K_1(x, \eta) \rho(\eta; \xi, \tau) d\eta$. Тогда $I_{tx}^{1-\nu} q(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \tau + 0$. Кроме того, из (2.3.20) и ограниченности ρ на $[\tau, T]$ следует $h(x) = O((x - \tau)^{2-\nu})$, $x \rightarrow \tau + 0$, поэтому $I_{tx}^{1-\nu} h(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \tau + 0$. Следовательно, $I_{tx}^{\nu} D_{tx}^{\nu} q = q$, $I_{tx}^{\nu} D_{tx}^{\nu} h = h$. Применяя I_{tx}^{ν} к (2.3.22), получаем (2.3.21), а значит и (2.3.17). Так как при $T_1 < T_2$ решения, построенные на $[\tau, T_1]$ и $[\tau, T_2]$, удовлетворяют одному и тому же уравнению на $[\tau, T_1]$, то по единственности они совпадают на этом отрезке. Следовательно, локальные решения согласованы и задают единственную функцию $\rho(\cdot; \xi, \tau) \in C_{loc}[\tau, \infty)$. При этом полагаем $\rho(\eta; \xi, \tau) = 0$ при $0 < \eta \leq \tau$. Понадобится следующая форма принципа максимума для оператора L_0 .

Лемма 2.3.7. Пусть $T > 0$ и $Q_T^- = \{(x, t): 0 < t < T, x > t\}$. Пусть вещественная функция W непрерывна в замыкании Q_T^- на каждом множестве $0 \leq t \leq T_0 < T$, имеет необходимые производные в Q_T^- , удовлетворяет уравнению $D_{0t}^{\alpha} W - a^2 W_{xx} = 0$ в Q_T^- , условиям $W(x, 0) = 0$, $W(t, t) = 0$, и стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [0, T_0]$ для каждого $T_0 < T$. Тогда $W(x, t) \equiv 0$ в Q_T^- .

Доказательство. Достаточно доказать, что $W \leq 0$; затем тот же довод применяется к $-W$. Зафиксируем $T_0 < T$ и предположим, что W принимает положительные значения в $Q_{T_0}^-$. Для $\varepsilon > 0$ положим $W_{\varepsilon}(x, t) = W(x, t) - \varepsilon \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$. Тогда $D_{0t}^{\alpha} W_{\varepsilon} - a^2 (W_{\varepsilon})_{xx} = -\varepsilon$. На линиях $t = 0$ и $x = t$ функция W_{ε}

неположительна. Кроме того, из равномерного стремления $W(x, t)$ к нулю при $x \rightarrow \infty$ следует, что положительный максимум W_ε , если он существует, достигается в конечной точке области. Следовательно, найдётся точка (x_0, t_0) такая, что $x_0 > t_0 > 0$ и $W_\varepsilon(x_0, t_0)$ является положительным максимумом функции W_ε на множестве $0 \leq t \leq T_0, x \geq t$. Здесь возможно $t_0 = T_0$, но уравнение выполнено в этой точке, так как $T_0 < T$. В точке максимума $(W_\varepsilon)_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$. Кроме того, для $g(t) = W_\varepsilon(x_0, t)$ функция g имеет положительный максимум на $[0, t_0]$ в точке t_0 . Поэтому $D_{0t}^\alpha g(t_0) = \frac{g(t_0)}{\Gamma(1-\alpha)} t_0^{-\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_0} \frac{g(t_0) - g(s)}{(t_0 - s)^{\alpha+1}} ds \geq 0$. Отсюда $D_{0t}^\alpha W_\varepsilon(x_0, t_0) - a^2 (W_\varepsilon)_{xx}(x_0, t_0) \geq 0$, что противоречит равенству с правой частью $-\varepsilon$. Значит, $W_\varepsilon \leq 0$ в $Q_{T_0}^-$. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$, получаем $W \leq 0$ в $Q_{T_0}^-$. Поскольку $T_0 < T$ произвольно, $W \leq 0$ во всей области Q_T^- . Применение того же рассуждения к $-W$ даёт $W \geq 0$.

Функция Грина исходной задачи

Пусть ρ построена в лемме о разрешимости уравнения (2.3.22). Определим G формулой (2.3.15).

Теорема 2.3.1. Для каждой точки источника $0 < \xi < \tau$ функция $G(x, t; \xi, \tau)$, заданная формулой (2.3.15), является функцией Грина задачи (3)-(5). Именно, $G(0, t; \xi, \tau) = 0, G(x, x; \xi, \tau) = 0$, и

$$(D_{xt}^\alpha - a^2 \partial_{xx})G(x, t; \xi, \tau) = \delta(x - \xi)\delta(t - \tau) \quad (2.3.24)$$

в $\mathcal{D}'(Q)$.

Доказательство. Условие $G(0, t; \xi, \tau) = 0$ следует из (2.3.13). Условие на диагонали при $x > \tau$ совпадает с уравнением (2.3.17); При $0 < x \leq \tau$ диагональное условие выполнено автоматически, поскольку $H(x - \tau) = 0$. Рассмотрим ту же формулу как функцию \mathcal{G} в полуплоскости $x > 0, t > 0$, то есть $\mathcal{G}(x, t; \xi, \tau) = \Gamma(x, t; \xi, \tau) + a^2 \int_0^t \Gamma(x, t; \eta, \eta) \tilde{\rho}(\eta; \xi, \tau) d\eta$. По леммам о Γ и диагональном потенциале имеем

$$L_0 \mathcal{G} = \delta(x - \xi)\delta(t - \tau) + a^2 \tilde{\rho}(x; \xi, \tau)\delta(t - x). \quad (2.3.25)$$

В области $0 < t < x$ правая часть равна нулю. След \mathcal{G} на линиях $t = 0$ и $t = x$ равен нулю. Из стандартных оценок функции Райта следует также, что $\mathcal{G}(x, t; \xi, \tau) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ равномерно по t на каждом отрезке $0 \leq t \leq T$. Поэтому по предыдущей лемме $\mathcal{G}(x, t; \xi, \tau) = 0, 0 < t < x$.

Строго говоря, применение леммы выполняется на компактных подобластях Q_T^- ; сингулярная точка (ξ, τ) принадлежит области Q , а диагональный источник расположен на границе $t = x$, поэтому внутри Q_T^- функция \mathcal{G} является решением $L_0 W = 0$. Переход к равенству (45) во всей области Q^- производится по произвольности T .

В области Q функция G является сужением функции \mathcal{G} , продолженной нулём в область $0 < t < x$. Поэтому по лемме о продолжении нулём оператор D_{xt}^α в Q совпадает с действием D_{0t}^α на это продолжение. Диагональное слагаемое $a^2 \tilde{\rho}(x; \xi, \tau) \delta(t - x)$ в (2.3.25) сосредоточено на границе Q и не даёт вклада в $\mathcal{D}'(Q)$. Остаётся только источник $\delta(x - \xi) \delta(t - \tau)$, что доказывает (2.3.24).

Регулярное решение

В предыдущих пунктах функция Грина была построена через вспомогательное ядро Γ и диагональную плотность ρ . Для доказательства существования регулярного решения удобнее сначала построить не точечную плотность $\rho(\eta; \xi, \tau)$, а суммарную диагональную плотность, соответствующую заданной правой части. Такой способ не меняет формулу функции Грина, но делает обоснование регулярности более прямым.

Пусть $f \in C_0^\infty(Q)$, $Q = \{(x, t): 0 < x < t\}$. Здесь $C_0^\infty(Q)$ означает пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, содержащимся внутри области Q . Продолжим f нулём в полуплоскость $x > 0, t > 0$: $\tilde{f}(x, t) = H(t - x)f(x, t)$. Так как $\text{supp} f \Subset Q$, существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $t - \xi \geq \varepsilon$ для всех $(\xi, \tau) \in \text{supp} f$. Поэтому в некоторой окрестности диагонали $t = x$ функция f тождественно равна нулю. Следовательно, продолжение $\tilde{f}(x, t) = H(t - x)f(x, t)$ не имеет скачка на диагонали и принадлежит $C_0^\infty(\{x > 0, t > 0\})$. Определим объёмный потенциал вспомогательной задачи в полуплоскости:

$$U_f(x, t) = \int_0^t \int_0^\tau \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (2.3.26)$$

Эквивалентно, $U_f(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty \Gamma(x, t; \xi, \tau) \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau$. Положим $\Phi_f(x) = U_f(x, x)$, $x > 0$.

Лемма 2.3.8. Пусть $f \in C_0^\infty(Q)$. Тогда функция U_f является классическим решением вспомогательной задачи

$$\left(D_{0t}^\alpha - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) U_f = \tilde{f}(x, t), \quad x > 0, t > 0, \quad (2.3.27)$$

$$U_f(0, t) = 0. \quad (2.3.28)$$

Кроме того, $\Phi_f \in C^\infty(0, \infty)$. Так как $\text{supp} f \Subset Q$, можно выбрать число $b > 0$ так, что $\text{supp} f \subset \{(\xi, \tau) \in Q: \tau \geq 2b\}$. Тогда

$$\Phi_f(x) = 0, \quad 0 < x < 2b \quad (2.3.29)$$

Доказательство. Так как $\tilde{f} \in C_0^\infty(\{x > 0, t > 0\})$, её носитель отделён от границ $x = 0$ и $t = 0$. Ядро Γ является функцией Грина оператора $L_0 = D_{0t}^\alpha -$

$a^2 \partial_{xx}$ в полуплоскости с условием Дирихле при $x = 0$. Поэтому равенство (2.3.27) сначала следует в смысле обобщенных функций.

Укажем, почему полученное решение является классическим внутри полуплоскости. Обозначим через $\hat{g}(\lambda) = \int_0^\infty g(x) \sin(\lambda x) dx$ синус-преобразование по переменной x . Для $\tilde{f} \in C_0^\infty$ функция $\tilde{f}(\lambda, t)$ убывает по λ быстрее любой степени равномерно по t на конечных промежутках. После синус-преобразования потенциал U_f удовлетворяет уравнению $D_{0t}^\alpha \hat{U}_f(\lambda, t) + a^2 \lambda^2 \hat{U}_f(\lambda, t) = \hat{\tilde{f}}(\lambda, t)$, $(I_{0t}^{1-\alpha} \hat{U}_f)(\lambda, 0+) = 0$. Отсюда $\hat{U}_f(\lambda, t) = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-a^2 \lambda^2 (t - \tau)^\alpha) \tilde{f}(\lambda, \tau) d\tau$. Используя стандартную оценку $|E_{\alpha, \alpha}(-r)| \leq \frac{C}{1+r}$, $r \geq 0$ и быстрое убывание \tilde{f} по λ , получаем абсолютную сходимость обратного синуспреобразования после умножения на λ и на λ^2 . Поэтому $U_{f,x}$ и $U_{f,xx}$ существуют и непрерывны внутри полуплоскости. Кроме того, $D_{0t}^\alpha \hat{U}_f = -a^2 \lambda^2 \hat{U}_f + \hat{\tilde{f}}$ и правая часть также допускает обратное синус-преобразование. Следовательно, $D_{0t}^\alpha U_f$ существует, непрерывен внутри полуплоскости, и (2.3.27) выполняется поточечно. Условие (2.3.28) следует из равенства $\Gamma(0, t; \xi, \tau) = 0$. Так как $\text{supp} f \Subset Q$, можно выбрать число $b > 0$ так, что $\text{supp} f \subset \{(\xi, \tau) \in Q : \tau \geq 2b\}$. Тогда при $0 < x < 2b$ в интеграле $U_f(x, x)$ все значения $\tau \leq x < 2b$ попадают в область, где $f = 0$. Следовательно, $\Phi_f(x) = 0$, $0 < x < 2b$. Гладкость Φ_f по x следует из гладкости U_f внутри полуплоскости и из того, что носитель источника отделён от диагонали $t = x$. Теперь найдём диагональную плотность, которая обеспечивает выполнение условия $u(x, x) = 0$. Для этого рассмотрим уравнение Вольтерра первого рода

$$a^2 \int_0^x \Gamma(x, x; \eta, \eta) \mu(\eta) d\eta = -\Phi_f(x), x > 0. \quad (2.3.30)$$

Лемма 2.3.9. Пусть $f \in C_0^\infty(Q)$, а число $b > 0$ выбрано так, что выполнено (2.3.29). Тогда уравнение (2.3.30) имеет единственное решение в классе функций $\mu \in C_{\text{loc}}(0, \infty)$, $\mu(x) = 0$ при $0 < x < b$. На каждом отрезке $[b, T]$ это решение находится из уравнения Вольтерра второго рода

$$\mu(x) + \frac{2}{a} \int_b^x R(x, \eta) \mu(\eta) d\eta = -\frac{2}{a} D_{bx}^\nu \Phi_f(x), b < x \leq T. \quad (2.3.31)$$

Правая часть в (2.3.31) продолжается в точку $x = b$ нулём.

Доказательство. На промежутке $(0, b)$ полагаем $\mu(x) = 0$. Так как по (2.3.29). $\Phi_f(x) = 0$, $0 < x < 2b$, то правая часть уравнения (2.3.30) равна нулю при $0 < x < b$, и это значение μ согласовано с уравнением. Пусть теперь $x > b$. Так как μ уже равна нулю на $(0, b)$, уравнение (2.3.30) принимает вид

$$a^2 \int_b^x \Gamma(x, x; \eta, \eta) \mu(\eta) d\eta = -\Phi_f(x). \quad (2.3.32)$$

На каждом треугольнике $b \leq \eta \leq x \leq T$ диагональное ядро имеет разложение $a^2 \Gamma(x, x; \eta, \eta) = \frac{a}{2\Gamma(\nu)} (x - \eta)^{\nu-1} + K_1(x, \eta)$, где

$$K_1(x, \eta) = O((x - \eta)^{1-\nu}), \partial_x K_1(x, \eta) = O((x - \eta)^{-\nu}) \quad (2.3.33)$$

равномерно на указанном треугольнике. Поэтому (2.3.32) эквивалентно уравнению

$$\frac{a}{2} I_{bx}^\nu \mu(x) + \int_b^x K_1(x, \eta) \mu(\eta) d\eta = -\Phi_f(x) \quad (2.3.34)$$

Применяя оператор D_{bx}^ν , получаем (2.3.31), где $R(x, \eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \int_\eta^x (x - r)^{-\nu} K_1(r, \eta) dr$. Из (2.3.33) следует оценка $|R(x, \eta)| \leq C_T (x - \eta)^{1-2\nu}$, $b \leq \eta < x \leq T$. Так как $0 < \nu < 1/2$, ядро R интегрируемо по η и является вольтерровым ядром со слабой особенностью. Правая часть (2.3.31) непрерывна на $[b, T]$ после продолжения в точку $x = b$ нулём. Действительно, $\Phi_f \in C^\infty(0, \infty)$, а из (2.3.29) следует, что Φ_f тождественно равна нулю в окрестности точки b . Поэтому $D_{bx}^\nu \Phi_f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow b + 0$. Следовательно, уравнение (2.3.31) имеет единственное решение на $[b, T]$ по методу последовательных приближений. При разных T эти решения согласованы по единственности, что даёт единственную функцию $\mu \in C_{\text{loc}}(0, \infty)$, $\mu(x) = 0$ при $0 < x < b$. Осталось проверить обратный переход. Пусть $h(x) = \int_b^x K_1(x, \eta) \mu(\eta) d\eta$. Из (2.3.33) и локальной ограниченности μ следует $h(x) = O((x - b)^{2-\nu})$, $x \rightarrow b + 0$. Значит, $I_{bx}^{1-\nu} h(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow b + 0$. Кроме того, по (2.3.29) $I_{bx}^{1-\nu} \Phi_f(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow b + 0$. Поэтому применение оператора I_{bx}^ν к (2.3.31) возвращает (2.3.34), а значит и (2.3.32). С учётом равенства $\mu = 0$ на $(0, b)$ получаем исходное уравнение (2.3.30). Для найденной плотности μ введём диагональный потенциал

$$(\mathcal{P}\mu)(x, t) = a^2 \int_0^t \Gamma(x, t; \eta, \eta) \mu(\eta) d\eta \quad (2.3.35)$$

Интеграл локально сходится. В самом деле, если (x, t) принадлежит компакту внутри полуплоскости и $x \neq t$, то при $\eta \rightarrow t - 0$ первый аргумент функции w_ν отделён от нуля, и ядро убывает быстрее любой степени $t - \eta$. Если же $x = t$, то $\Gamma(t, t; \eta, \eta) = O((t - \eta)^{\nu-1})$, $\eta \rightarrow t - 0$, а особенность $(t - \eta)^{\nu-1}$ интегрируема, так как $0 < \nu < 1$.

Лемма 2.3.10. Для $\mu \in C_{\text{loc}}(0, \infty)$, построенной выше, диагональный потенциал (2.3.35) удовлетворяет в смысле обобщенных функций равенствам

$$(D_{0t}^\alpha - a^2 \partial_{xx}) \mathcal{P}\mu = a^2 \mu(x) \delta(t - x) \quad (2.3.36)$$

$$(\mathcal{P}\mu)(0, t) = 0. \quad (2.3.37)$$

Кроме того, внутри области Q функция $\mathcal{P}\mu$ является классическим решением однородного уравнения

$$D_{0t}^\alpha \mathcal{P}\mu - a^2 (\mathcal{P}\mu)_{xx} = 0. \quad (2.3.38)$$

Доказательство. Так как $\Gamma(x, t; \eta, \eta) = 0$ при $\eta > t$, потенциал можно записать как $(\mathcal{P}\mu)(x, t) = a^2 \int_0^\infty \Gamma(x, t; \eta, \eta) \mu(\eta) d\eta$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\{x > 0, t > 0\})$. Тогда $\langle L_0(\mathcal{P}\mu), \varphi \rangle = a^2 \int_0^\infty \mu(\eta) \langle L_0 \Gamma(x, t; \eta, \eta), \varphi(x, t) \rangle d\eta = a^2 \int_0^\infty \mu(\eta) \varphi(\eta, \eta) d\eta$. Правая часть совпадает с действием $a^2 \mu(x) \delta(t - x)$ на функцию φ . Поэтому (2.3.36) доказано. Условие (2.3.37) следует из $\Gamma(0, t; \eta, \eta) = 0$. Если компакт $K \subseteq Q$, то существует $d > 0$, такое что $t - x \geq d$ на K . Для $(x, t) \in K$ сингулярная точка (η, η) диагонального источника не попадает в окрестность точки (x, t) . Поэтому ядро $\Gamma(x, t; \eta, \eta)$ вместе с производными по x , входящими в оператор, оценивается интегрируемыми функциями по η . Следовательно, внутри Q оператор можно вносить под знак интеграла, и (2.3.38) следует из того, что для каждого фиксированного η функция $\Gamma(x, t; \eta, \eta)$ имеет источник только в точке (η, η) , расположенной на границе $t = x$, а не внутри Q . Теперь положим $U(x, t) = U_f(x, t) + (\mathcal{P}\mu)(x, t)$, $x > 0, t > 0$. Из определения μ следует

$$U(x, x) = 0, x > 0. \quad (2.3.39)$$

Кроме того, $U(0, t) = 0$. В области $Q^- = \{(x, t): 0 < t < x\}$ функция U удовлетворяет однородному уравнению $D_{0t}^\alpha U - a^2 U_{xx} = 0$, имеет нулевые следы на $t = 0$ и $t = x$, а также убывает при $x \rightarrow \infty$ на каждом конечном промежутке по t . Поэтому по принципу максимума, использованному выше для области Q^- , имеем

$$U(x, t) = 0, 0 < t < x. \quad (2.3.40)$$

Теорема 2.3.2. Пусть $f \in C_0^\infty(Q)$. Тогда задача $D_{xt}^\alpha u - a^2 u_{xx} = f(x, t)$, $0 < x < t$, $u(0, t) = 0$, $u(x, x) = 0$ имеет регулярное решение на каждом усечённом треугольнике $Q_T = \{0 < x < t < T\}$. Это решение задаётся формулой

$$u(x, t) = U_f(x, t) + a^2 \int_0^t \Gamma(x, t; \eta, \eta) \mu(\eta) d\eta, 0 < x < t, \quad (2.3.41)$$

где U_f определён формулой (2.3.26), а μ является единственным решением уравнения (2.3.30). При этом

$$u_x(x, x+0) = \mu(x), x > 0 \quad (2.3.42)$$

Доказательство. По построению $U = U_f + \mathcal{P}\mu$ удовлетворяет в полуплоскости равенству

$$L_0U = \tilde{f}(x, t) + a^2\mu(x)\delta(t-x) \quad (2.3.43)$$

а также условиям $U(0, t) = 0$ и $U(x, x) = 0$. Из (2.3.40) следует, что $U(x, t) = H(t-x)u(x, t)$, где $u = U|_Q$. Так как $U = 0$ в области $0 < t < x$, $U = u$ в области $0 < x < t$, а след $U(x, x)$ равен нулю, стандартная формула для второй производной кусочно гладкой функции даёт

$$L_0U = H(t-x)(D_{xt}^\alpha u - a^2u_{xx}) + a^2u_x(x, x+0)\delta(t-x). \quad (2.3.44)$$

Сравнивая (2.3.43) и (2.3.44), получаем $D_{xt}^\alpha u - a^2u_{xx} = f(x, t)$ в Q , и одновременно $u_x(x, x+0) = \mu(x)$.

Граничные условия следуют из равенств $U(0, t) = 0$ и $U(x, x) = 0$. Остаётся указать регулярность. Пусть $K \Subset Q_T$. Тогда расстояние от K до диагонали $t = x$ положительно. На таком компакте диагональный потенциал является гладким по переменным (x, t) , поскольку его источник расположен на границе, а не внутри Q . Объёмный потенциал U_f является классическим решением по Лемме 2.3.8. Следовательно, u_x, u_{xx} и $D_{xt}^\alpha u$ существуют и непрерывны внутри Q_T , а уравнение выполняется поточечно. Непрерывность u на замыкании Q_T и выполнение следов следуют из локальной сходимости потенциалов, из (2.3.39) и из равенства $\Gamma(0, t; \xi, \tau) = 0$. Локальная непрерывность следа $u_x(x, x+0)$ следует из (2.3.42) и из $\mu \in C_{\text{loc}}(0, \infty)$. Значит, u является регулярным решением.

Лемма 2.3.11. Пусть $K \Subset Q$, и пусть $T > \sup\{\tau: (\xi, \tau) \in K\}$. Тогда решения $\rho(\cdot; \xi, \tau)$, продолженные нулём на $(0, \tau]$, непрерывно зависят от параметров $(\xi, \tau) \in K$ как элементы пространства $C[0, T]$. В частности, существует постоянная $C_{K, T}$ такая, что $\|\rho(\cdot; \xi, \tau)\|_{C[0, T]} \leq C_{K, T}, (\xi, \tau) \in K$

Доказательство. Так как $K \Subset Q$, то величины $\xi, \tau - \xi$ и расстояние от K до границы области Q отделены от нуля. Поэтому правая часть уравнения второго рода $-\frac{2}{a}D_{tx}^\nu \Gamma(x, x; \xi, \tau)$ непрерывно зависит от параметров $(\xi, \tau) \in K$ и равномерно ограничена на соответствующих отрезках. Ядро $R(x, \eta)$ не зависит от (ξ, τ) и удовлетворяет оценке $|R(x, \eta)| \leq C_T(x - \eta)^{1-2\nu}$. Так как $0 < \nu < 1/2$, имеем $1 - 2\nu > -1$, и соответствующий оператор Вольтерра действует непрерывно в $C[0, T]$. Решение уравнения второго рода выражается через сходящийся ряд последовательных приближений. Равномерная сходимость

этого ряда даёт непрерывную зависимость решения от правой части, а следовательно, и от параметров (ξ, τ) .

Теорема 2.3.3. Пусть $f \in C_0^\infty(Q)$. Тогда регулярное решение (2.3.41) совпадает с представлением

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^\tau G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, 0 < x < t, \quad (2.3.45)$$

где

$$G(x, t; \xi, \tau) = \Gamma(x, t; \xi, \tau) + a^2 \int_\tau^t \Gamma(x, t; \eta, \eta) \rho(\eta; \xi, \tau) d\eta. \quad (2.3.46)$$

Доказательство. По Лемме 2.3.11 плотность $\rho(\eta; \xi, \tau)$ локально ограничена и непрерывно зависит от параметров (ξ, τ) на компактах. Поэтому перестановка порядка интегрирования ниже допустима. Для фиксированной точки источника (ξ, τ) плотность $\rho(\eta; \xi, \tau)$ является решением уравнения $a^2 \int_\tau^x \Gamma(x, x; \eta, \eta) \rho(\eta; \xi, \tau) d\eta = -\Gamma(x, x; \xi, \tau), x > \tau$. По линейности и по единственности решения вольтеррового уравнения для диагональной плотности имеем

$$\mu(x) = \int_0^x \int_0^\tau \rho(x; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (2.3.47)$$

Здесь перестановка интегрирования допустима, поскольку носитель f компактен внутри Q , а решения уравнения Вольтерра второго рода зависят от параметров (ξ, τ) непрерывно на компактах; это следует из оценки $|R(x, \eta)| \leq C_T (x - \eta)^{1-2\nu}$ и метода последовательных приближений. Подставляя (2.3.47) в диагональный потенциал (2.3.41) и применяя теорему Фубини, получаем (2.3.45). Первое слагаемое в (2.3.46) даёт объёмный потенциал U_f , второе слагаемое даёт диагональный потенциал с плотностью μ .

Лемма 2.3.12. Пусть $T > 0$ и $Q_T = \{(x, t): 0 < x < t < T\}$. Пусть функция w регулярна в Q_T , непрерывна в \bar{Q}_T и удовлетворяет $D_{xt}^\alpha w - a^2 w_{xx} \leq 0$ в Q_T . Если $w(0, t) \leq 0, 0 < t < T$ и $w(x, x) \leq 0, 0 < x < T$, тогда $w(x, t) \leq 0, 0 < x < t < T$

Доказательство. Зафиксируем $T_0 < T$. Предположим, что w принимает положительные значения в области $0 < x < t \leq T_0$. Для $\varepsilon > 0$ положим $\psi(x, t) = \frac{(t-x)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, w_\varepsilon = w - \varepsilon\psi$. На границах $x = 0$ и $t = x$ функция w_ε неположительна. При достаточно малом ε она остаётся положительной в некоторой внутренней точке, поэтому её положительный максимум достигается в точке (x_0, t_0) , где $0 < x_0 < t_0 \leq T_0$. В этой точке $(w_\varepsilon)_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$. Для функции $g(t) = w_\varepsilon(x_0, t)$ на промежутке $[x_0, t_0]$ имеем положительный максимум в точке t_0 . Поэтому

$D_{x_0 t}^\alpha g(t_0) = \frac{g(t_0)}{\Gamma(1-\alpha)} (t_0 - x_0)^{-\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x_0}^{t_0} \frac{g(t_0) - g(s)}{(t_0 - s)^{\alpha+1}} ds \geq 0.$ Следовательно,

$(D_{xt}^\alpha - a^2 \partial_{xx})w_\varepsilon(x_0, t_0) \geq 0.$ С другой стороны, $D_{xt}^\alpha \psi = 1$ а $\psi_{xx} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Gamma(1+\alpha)} (t - x)^{\alpha-2} < 0$ Значит, $(D_{xt}^\alpha - a^2 \partial_{xx})\psi = 1 - a^2 \psi_{xx} > 0$ Из неравенства для w получаем $(D_{xt}^\alpha - a^2 \partial_{xx})w_\varepsilon < 0$, что противоречит предыдущему неравенству в точке положительного максимума. Следовательно, $w_\varepsilon \leq 0$. Переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$, получаем $w \leq 0$. Так как $T_0 < T$ произвольно, утверждение доказано.

Теорема 2.3.4. В классе регулярных решений задача имеет не более одного решения на каждом Q_T .

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 - два регулярных решения с одной и той же правой частью. Их разность $w = u_1 - u_2$ удовлетворяет $D_{xt}^\alpha w - a^2 w_{xx} = 0, w(0, t) = 0, w(x, x) = 0$ Применяя принцип максимума к w и затем к $-w$, получаем $w \equiv 0$ в Q_T . Следовательно, решение единственно.

3 СУБДИФФУЗИОННЫЕ И ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ В СУЖАЮЩИХСЯ И РАСШИРЯЮЩИХСЯ ОБЛАСТЯХ

3.1 Краевая задача для уравнения дробной диффузии с бесконечной памятью в сужающейся нецилиндрической области

В данной главе изучается краевая задача для одномерного уравнения диффузии с дробной производной Римана-Лиувилля по времени, определённой с нижним пределом интегрирования $-\infty$. Такой выбор нижнего предела приводит к необходимости контролировать поведение решения при $t \rightarrow -\infty$. Задача ставится в нецилиндрической области, пространственное сечение которой линейно сужается и вырождается в точку при $t \rightarrow 0^-$. Основным инструментом исследования служит метод функций Грина и дробно-диффузионные потенциалы, приводящие к интегральному уравнению типа Вольтерра для неизвестной граничной плотности.

Пусть $0 < \alpha < 1$ и $\beta = \frac{\alpha}{2} \in (0, \frac{1}{2})$. Рассмотрим уравнение дробной диффузии

$$D_{-\infty t}^{\alpha} u(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) \quad (3.1.1)$$

в области

$$\Omega = \{(x, t): 0 < x < -t, -\infty < t < 0\}. \quad (3.1.2)$$

На границе области задаются условия Дирихле на фиксированной стороне $x = 0$ и на движущейся стороне $x = -t$:

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(-t, t) = \psi(t), \quad -\infty < t < 0. \quad (3.1.3)$$

Цель состоит в получении явной интегральной формулы для регулярного решения и в определении условий на данные f, φ, ψ , гарантирующие существование такого решения.

Для $\gamma > 0$ введём стандартное ядро Шилова-Гельфанда с дробным показателем: $h_{\gamma}(s) = \frac{s^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}$, $s > 0$. Известно, что (1.2.4)

$$(I_{-\infty t}^{1-\alpha} g)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{-\alpha} g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t g(\tau) h_{1-\alpha}(t-\tau) d\tau. \quad (3.1.4)$$

Определение 3.1.1. Функция $u = u(x, t)$ называется регулярным решением задачи (3.1.1), (3.1.3) в области Ω , если выполняются условия:

- $u \in C(\bar{\Omega})$;
- u_{xx} существует и непрерывна в Ω ;

- для каждого фиксированного x и каждого $t < 0$ интеграл (3.1.4) для $g(\tau) = u(x, \tau)$ конечен, а функция $t \mapsto (I_{-\infty t}^{1-\alpha} u(x, \cdot))(t)$ дифференцируема;
- для каждого $R < 0$ функция $(R - t)^{-\alpha} u(x, t)$ интегрируема по t на $(-\infty, R)$;
- уравнение (3.1.1) выполняется поточечно в Ω , и выполняются граничные условия (3.1.3).

Перенос нижнего предела в дробной производной

При построении фундаментального решения $V(x, \xi, t, \tau)$ далее используется условие $V(x, \xi, t, \tau) = 0$ при $t < \tau$. В этом случае для $t > \tau$ интеграл на промежутке $(-\infty, \tau)$, входящий в определение дробного интеграла Римана-Лиувилля, обращается в нуль, и оператор $D_{-\infty}^{\alpha}$ совпадает с $D_{\tau t}^{\alpha}$. Зафиксируем это утверждение.

Лемма 3.1.1. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\tau \in \mathbb{R}$, и функция g такая, что $g(t) = 0$ при $t < \tau$. Тогда для любого $t > \tau$ (при существовании интеграла) выполнено тождество $D_{-\infty t}^{\alpha} g(t) = D_{\tau t}^{\alpha} g(t)$, где

$$(D_{\tau t}^{\alpha} g)(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\tau}^t (t-s)^{-\alpha} g(s) ds \right].$$

Доказательство. По определению дробной производной Римана-Лиувилля порядка $0 < \alpha < 1$: $(D_{at}^{\alpha} g)(t) = \frac{d}{dt} (I_a^{1-\alpha} g)(t)$, где $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, при условии, что соответствующий дробный интеграл существует и полученная функция дифференцируема по t . Зафиксируем $t > \tau$. Тогда

$$\begin{aligned} (I_{-\infty t}^{1-\alpha} g)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-s)^{-\alpha} g(s) ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_{-\infty}^{\tau} (t-s)^{-\alpha} g(s) ds + \int_{\tau}^t (t-s)^{-\alpha} g(s) ds \right). \end{aligned}$$

Так как $g(s) = 0$ при $s < \tau$, то $(t-s)^{-\alpha} g(s) = 0$ для всех $s < \tau$, следовательно

$$\int_{-\infty}^{\tau} (t-s)^{-\alpha} g(s) ds = 0. \quad (3.1.5)$$

Отсюда

$$(I_{-\infty t}^{1-\alpha} g)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\tau}^t (t-s)^{-\alpha} g(s) ds = (I_{\tau t}^{1-\alpha} g)(t).$$

Если в точке $t > \tau$ существует дробная производная $D_{-\infty t}^{\alpha} g(t)$, то функция $I_{-\infty t}^{1-\alpha} g$ дифференцируема в t , а значит, дифференцируема и равная ей функция

$I_t^{1-\alpha} g$. Поэтому $D_{-\infty t}^\alpha g(t) = \frac{d}{dt}(I_{-\infty}^{1-\alpha} g)(t) = \frac{d}{dt}(I_{\tau t}^{1-\alpha} g)(t) = D_{\tau t}^\alpha g(t)$, что и требовалось доказать.

Задачу (3.1.1), (3.1.3) сведём к задаче с однородными условиями. Определим

$$u(x, t) = v(x, t) + \varphi(t) - \frac{x}{t}(\psi(t) - \varphi(t)), (x, t) \in \Omega. \quad (3.1.6)$$

Так как $t < 0$ и $0 < x < -t$, коэффициент x/t определён и удовлетворяет $\left|\frac{x}{t}\right| = \frac{x}{-t} \leq 1$ в Ω . Подстановка в граничные условия (3.1.3) даёт

$$\begin{aligned} u(0, t) &= v(0, t) + \varphi(t) = \varphi(t) \Rightarrow v(0, t) = 0 \\ u(-t, t) &= v(-t, t) + \varphi(t) - \frac{-t}{t}(\psi(t) - \varphi(t)) = v(-t, t) + \psi(t) \Rightarrow v(-t, t) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v(0, t) = 0, v(-t, t) = 0, -\infty < t < 0. \quad (3.1.7)$$

Поскольку функция $x \mapsto \varphi(t) - \frac{x}{t}(\psi(t) - \varphi(t))$ является аффинной по x , имеем $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\varphi(t) - \frac{x}{t}(\psi(t) - \varphi(t)) \right) = 0$. Подставляя (3.1.6) в уравнение (3.1.1), получаем задачу для v :

$$D_{-\infty}^\alpha v(x, t) - v_{xx}(x, t) = \tilde{f}(x, t), (x, t) \in \Omega, \quad (3.1.8)$$

где

$$\tilde{f}(x, t) = f(x, t) - D_{-\infty}^\alpha \varphi(t) + D_{-\infty}^\alpha \left[\frac{x}{t}(\psi(t) - \varphi(t)) \right]. \quad (3.1.9)$$

После построения решения v решение u восстанавливается формулой (3.1.6).

В случае $\mu = 0$ в (1.1.35) обозначаем $w_0(x, t)$. Зафиксируем ветвь $p^\beta = \exp(\beta \log p)$ в полуплоскости $\Re p > 0$, тогда $\Re(p^\beta) > 0$.

Лемма 3.1.2. Для $\Re p > 0, x \geq 0$

$$w_\eta(x, t) = t^{\eta-1} \phi\left(-\beta, \eta; -\frac{x}{t^\beta}\right), t > 0, \eta \in \mathbb{R}. \quad (3.1.10)$$

Справедливо

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} w_{\eta}(x, t) dt = p^{-\eta} e^{-xp^{\beta}}. \quad (3.1.11)$$

Лемма 3.1.3. Для параметров, при которых выражения имеют смысл, выполняются тождества:

$$D_{0t}^{\rho} w_{\eta}(x, t) = w_{\eta-\rho}(x, t), \quad (3.1.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} w_{\eta}(x, t) = -w_{\eta-\beta}(x, t), \quad (3.1.13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_{\eta}(x, t) = w_{\eta-2\beta}(x, t). \quad (3.1.14)$$

В частности, при $\alpha = 2\beta$ функция $w_{\beta}(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$D_{0t}^{\alpha} w_{\beta}(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_{\beta}(x, t). \quad (3.1.15)$$

Фундаментальное решение и функция Грина на полуоси

Рассмотрим задачу в полуплоскости $x > 0$ для фундаментального решения, источник в точке (ξ, τ) :

$$\begin{cases} D_{-\infty t}^{\alpha} V(x, \xi, t, \tau) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, \xi, t, \tau) = \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \\ V(0, \xi, t, \tau) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x, \xi, t, \tau) = 0 \\ V(x, \xi, t, \tau) = 0, t < \tau, \end{cases} \quad (3.1.16)$$

где $\xi > 0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ фиксированы. Для $t > \tau$ из условия $V(x, \xi, t, \tau) = 0$ при $t < \tau$ имеем $D_{-\infty t}^{\alpha} V = D_{\tau t}^{\alpha} V$. Положим $s = t - \tau > 0$ и $\hat{V}(x, \xi, s) := V(x, \xi, \tau + s, \tau)$. Тогда (3.1.16) переписывается как $D_{0s}^{\alpha} \hat{V}(x, \xi, s) - \hat{V}_{xx}(x, \xi, s) = \delta(x - \xi) \delta(s)$, $s > 0$ с условиями $\hat{V}(0, \xi, s) = 0$ и $\hat{V}(\cdot, \xi, s) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Применим преобразование Лапласа по s : $\bar{V}(x, \xi, p) = \int_0^{\infty} e^{-ps} \hat{V}(x, \xi, s) ds$, $\Re p > 0$.

Представление решения

По свойству $\mathcal{L}\{\delta(s)\} = 1$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение с дельта-источником: $p^{\alpha} \bar{V}(x, \xi, p) - \bar{V}_{xx}(x, \xi, p) = \delta(x - \xi)$, то есть $\bar{V}_{xx} - p^{\alpha} \bar{V} = -\delta(x - \xi)$. Положим $k = p^{\beta}$, тогда $k^2 = p^{\alpha}$. На всей прямой фундаментальное решение уравнения $y'' - k^2 y = -\delta(x - \xi)$ равно $\frac{1}{2k} e^{-k|x-\xi|}$. Для полуоси $x > 0$ с условием Дирихле $y(0) = 0$ применяется метод отражений:

$$\bar{V}(x, \xi, p) = \frac{1}{2p^{\beta}} \left(e^{-p^{\beta}|x-\xi|} - e^{-p^{\beta}(x+\xi)} \right).$$

Выполним обратное преобразование по p с помощью (3.1.11), получаем для $t > \tau$:

$$V(x, \xi, t, \tau) = \frac{1}{2} \left(w_\beta(|x - \xi|, t - \tau) - w_\beta(x + \xi, t - \tau) \right). \quad (3.1.17)$$

Определение 3.1.2. Функцией Грина для задачи Дирихле на полуоси $x > 0$ для уравнения $D_{-\infty, t}^\alpha v - v_{xx} = \tilde{f}$ с условием $v(0, t) = 0$ называется ядро

$$G(x, \xi, t, \tau) = \frac{1}{2} \left(w_\beta(|x - \xi|, t - \tau) - w_\beta(x + \xi, t - \tau) \right), \\ x > 0, \xi > 0, t > \tau. \quad (3.1.18)$$

Заметим, что $G(0, \xi, t, \tau) = 0$, поскольку $|0 - \xi| = \xi$ и $0 + \xi = \xi$. Кроме того, по каждая из функций $w_\beta(|x - \xi|, t - \tau)$ и $w_\beta(x + \xi, t - \tau)$ удовлетворяет однородному уравнению $D_{\tau t}^\alpha(\cdot) = (\cdot)_{xx}$ при $t > \tau$ (в смысле классических функций вне точки $x = \xi$ и в смысле обобщенных функций глобально).

Представление решения в области Ω

Вернёмся к задаче (3.1.8), (3.1.7). Будем искать v в виде суммы объёмного потенциала и потенциалов простого слоя на границе.

Определим объёмный потенциал через G :

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^t \int_0^{-\tau} \tilde{f}(\xi, \tau) G(x, \xi, t, \tau) d\xi d\tau, (x, t) \in \Omega. \quad (3.1.19)$$

Поскольку $G(0, \xi, t, \tau) = 0$, имеем

$$F(0, t) = 0, t < 0. \quad (3.1.20)$$

Далее введём потенциалы, удовлетворяющие граничным условиям.

(i) Дробный потенциал простого слоя на фиксированной границе $x = 0$. Пусть μ - неизвестная плотность на $(-\infty, 0]$. Положим

$$\Phi_1(x, t) = \int_{-\infty}^t w_0(x, t - \tau) \mu(\tau) d\tau. \quad (3.1.21)$$

(ii) Дробный потенциал двойного слоя на движущейся границе $x = -t$. Пусть ν - неизвестная плотность. Определим

$$\Phi_2(x, t) = \int_{-\infty}^t \nu(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, t, \tau) \Big|_{\xi=-\tau} d\tau. \quad (3.1.22)$$

Так как для $\tau \leq t < 0$ и $(x, t) \in \Omega$ выполняется $0 < x < -t \leq -\tau$, имеем $\xi = -\tau > x$ и $|x - \xi| = \xi - x = -\tau - x$. Дифференцируя (3.1.18) по ξ и применяя (3.1.13), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, t, \tau) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} w_\beta(\xi - x, t - \tau) - \frac{\partial}{\partial \xi} w_\beta(x + \xi, t - \tau) \right) \\ &= \frac{1}{2} (-w_0(\xi - x, t - \tau) + w_0(x + \xi, t - \tau)). \end{aligned}$$

Подставляя $\xi = -\tau$, получаем явный вид потенциала двойного слоя:

$$\Phi_2(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t v(\tau) (w_0(x - \tau, t - \tau) - w_0(-\tau - x, t - \tau)) d\tau. \quad (3.1.23)$$

В частности, при $x = 0$ подынтегральное выражение обращается в нуль, поэтому

$$\Phi_2(0, t) = 0, \quad t < 0. \quad (3.1.24)$$

Будем искать решение (3.1.8), (3.1.7) в форме

$$v(x, t) = F(x, t) + \Phi_1(x, t) + \Phi_2(x, t). \quad (3.1.25)$$

Тогда условие $v(0, t) = 0$ переходит в

$$0 = v(0, t) = F(0, t) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi_1(x, t) + \Phi_2(0, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi_1(x, t)$$

так как $F(0, t) = 0$ по (3.1.20), а $\Phi_2(0, t) = 0$ по (3.1.24). Следовательно, требуется понять граничный след Φ_1 при $x \rightarrow 0^+$.

Лемма 3.1.4. Пусть $g \in C((-\infty, 0]) \cap L_1((-\infty, 0))$, тогда для любого $t < 0$ существует предел и выполнено равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^t g(\tau) w_0(x, t - \tau) d\tau = g(t). \quad (3.1.26)$$

Доказательство. Сделаем замену $s = t - \tau > 0$:

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) w_0(x, t - \tau) d\tau = \int_0^\infty g(t - s) w_0(x, s) ds.$$

Разложим $g(t - s) = g(t) + (g(t - s) - g(t))$:

$$\int_0^{\infty} g(t-s)w_0(x,s)ds = g(t) \int_0^{\infty} w_0(x,s)ds + \int_0^{\infty} (g(t-s) - g(t))w_0(x,s)ds.$$

Вычислим $\int_0^{\infty} w_0(x,s)ds$, имеем $\partial_s w_1(x,s) = w_0(x,s)$. Следовательно,

$$\int_0^S w_0(x,s)ds = w_1(x,S) - w_1(x,0+).$$

Из (3.1.10) следует $w_1(x,0+) = 0$ при $x > 0$. Кроме того, при $S \rightarrow \infty$ для фиксированного $x > 0$ имеем $\frac{x}{S^\beta} \rightarrow 0$ и $\phi(-\beta, 1; 0) = 1$, поэтому $w_1(x,S) \rightarrow 1$. Значит,

$$\int_0^{\infty} w_0(x,s)ds = \lim_{S \rightarrow \infty} (w_1(x,S) - 0) = 1. \quad (3.1.27)$$

Оценим второй интеграл. Пусть $\varepsilon > 0$. Разобьём интеграл по s : $\int_0^{\infty} = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty}$. На $[0, \varepsilon]$ по непрерывности g :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\varepsilon} (g(t-s) - g(t))w_0(x,s)ds \right| &\leq \sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} |g(t-s) - g(t)| \int_0^{\varepsilon} w_0(x,s)ds \\ &\leq \sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} |g(t-s) - g(t)|, \end{aligned}$$

так как

$$\int_0^{\varepsilon} w_0(x,s)ds \leq \int_0^{\infty} w_0(x,s)ds = 1$$

по (3.1.27). Правая часть может быть сделана сколь угодно малой выбором ε .

На $[\varepsilon, \infty)$ функция $g(t-s) - g(t)$ принадлежит L_1 по s (из $g \in L_1((-\infty, 0))$), а $w_0(x,s)$ при фиксированном ε равномерно ограничена по x и $s \geq \varepsilon$. Следовательно, по теореме Лебега о предельном переходе $\lim_{x \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{\infty} (g(t-s) - g(t))w_0(x,s)ds = 0$. Совмещая оценки и используя (3.1.27), получаем (3.1.26). Далее, получаем $\lim_{x \rightarrow 0+} \Phi_1(x,t) = \mu(t)$. Следовательно, из условия $v(0,t) = 0$ и (3.1.25) следует $0 = v(0,t) = F(0,t) + \mu(t) + \Phi_2(0,t) = \mu(t)$, то есть

$$\mu(t) \equiv 0, \quad t \leq 0. \quad (3.1.28)$$

Таким образом, $\Phi_1 \equiv 0$, и далее мы рассматриваем представление

$$v(x,t) = F(x,t) + \Phi_2(x,t). \quad (3.1.29)$$

Осталось обеспечить второе граничное условие $v(-t, t) = 0$, то есть найти плотность v из условия

$$0 = v(-t, t) = F(-t, t) + \lim_{x \rightarrow -t-0} \Phi_2(x, t).$$

Ключевым является вычисление предела $\Phi_2(x, t)$ при подходе к границе $x = -t$ изнутри Ω .

Лемма 3.1.5. Пусть $v \in C((-\infty, 0]) \cap L_1((-\infty, 0))$. Тогда для каждого $t < 0$ существует предел $\lim_{x \rightarrow -t-0} \Phi_2(x, t)$, и справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -t-0} \Phi_2(x, t) = \\ & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t v(\tau) (w_0(-t - \tau, t - \tau) - w_0(t - \tau, t - \tau)) d\tau - \frac{1}{2} v(t). \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

Доказательство. Зафиксируем $t < 0$ и положим $\varepsilon := (-t) - x > 0$ (то есть $x = -t - \varepsilon$). Тогда из (3.1.23):

$$\begin{aligned} \Phi_2(-t - \varepsilon, t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t v(\tau) \\ & (w_0(-t - \tau - \varepsilon, t - \tau) - w_0(t - \tau + \varepsilon, t - \tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

Совершим замену $s = t - \tau > 0$ (то есть $\tau = t - s$). Тогда

$$\Phi_2(-t - \varepsilon, t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} v(t - s) (w_0(-2t + s - \varepsilon, s) - w_0(s + \varepsilon, s)) ds. \quad (3.1.32)$$

Для фиксированного $s > 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ имеем $w_0(-2t + s - \varepsilon, s) \rightarrow w_0(-2t + s, s)$ и $w_0(s + \varepsilon, s) \rightarrow w_0(s, s)$. При $s \rightarrow 0$ сходимость для $w_0(s + \varepsilon, s)$ не является равномерной, поэтому выделим интегрирование по $s \in (0, \delta)$.

Пусть $\delta > 0$. Разобьём интеграл (3.1.32):

$$\int_0^{\infty} = \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty}.$$

На $[\delta, \infty)$ по непрерывности по первому аргументу и сходимости получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\delta}^{\infty} v(t - s) (w_0(-2t + s - \varepsilon, s) - w_0(s + \varepsilon, s)) ds \\ &= \int_{\delta}^{\infty} v(t - s) (w_0(-2t + s, s) - w_0(s, s)) ds. \end{aligned}$$

На $(0, \delta)$ разложим $v(t-s) = v(t) + (v(t-s) - v(t))$ и получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\delta v(t-s)(w_0(-2t+s-\varepsilon, s) - w_0(s+\varepsilon, s))ds = \\ & = v(t) \int_0^\delta (w_0(-2t+s-\varepsilon, s) - w_0(s+\varepsilon, s))ds \\ & + \int_0^\delta (v(t-s) - v(t))(w_0(-2t+s-\varepsilon, s) - w_0(s+\varepsilon, s))ds. \end{aligned}$$

Вторая часть стремится к 0 при $\delta \rightarrow 0+$ равномерно по малым ε , поскольку v непрерывна, а ядра интегрируемы на $(0, \delta)$.

Остаётся исследовать

$$J_{\varepsilon, \delta} := \int_0^\delta (w_0(-2t+s-\varepsilon, s) - w_0(s+\varepsilon, s))ds.$$

Первое слагаемое при $\varepsilon \rightarrow 0+$ переходит в $\int_0^\delta w_0(-2t+s, s)ds$. Нетривиален предел второго слагаемого $\int_0^\delta w_0(s+\varepsilon, s)ds$. Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^\delta (w_0(s+\varepsilon, s) - w_0(s, s))ds = 1. \quad (3.1.33)$$

Рассмотрим функцию w_1 :

$$w_1(x, s) = \phi\left(-\beta, 1; -\frac{x}{s^\beta}\right)$$

и используем соотношение $\partial_s w_1(x, s) = w_0(x, s)$ (частный случай (3.1.12) при $\rho = 1$). Положим $H_\varepsilon(s) = w_1(s+\varepsilon, s) - w_1(s, s)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} w_1(s+\varepsilon, s) &= \partial_x w_1(s+\varepsilon, s) + \partial_s w_1(s+\varepsilon, s) \\ &= -w_{1-\beta}(s+\varepsilon, s) + w_0(s+\varepsilon, s), \end{aligned}$$

и аналогично

$$\frac{d}{ds} w_1(s, s) = -w_{1-\beta}(s, s) + w_0(s, s).$$

Вычитая, получаем

$$H'_\varepsilon(s) = (w_0(s + \varepsilon, s) - w_0(s, s)) - (w_{1-\beta}(s + \varepsilon, s) - w_{1-\beta}(s, s)).$$

Интегрируя по $s \in (0, \delta)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\delta (w_0(s + \varepsilon, s) - w_0(s, s)) ds \\ = H_\varepsilon(\delta) - H_\varepsilon(0) + \int_0^\delta (w_{1-\beta}(s + \varepsilon, s) - w_{1-\beta}(s, s)) ds. \end{aligned}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0+$: $H_\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ по непрерывности по x при фиксированном $\delta > 0$. Кроме того, $H_\varepsilon(0) = w_1(\varepsilon, 0+) - w_1(0,0) = -1$, поскольку $w_1(0,0) = \phi(-\beta, 1; 0) = 1$ и $w_1(\varepsilon, 0+) = 0$. Последний интеграл стремится к 0 по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Получаем (3.1.33).

Из (3.1.33) следует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^\delta w_0(s + \varepsilon, s) ds = \int_0^\delta w_0(s, s) ds + 1.$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} J_{\varepsilon, \delta} = \int_0^\delta (w_0(-2t + s, s) - w_0(s, s)) ds - 1.$$

Переходя затем к пределу $\delta \rightarrow 0+$ и учитывая интегрируемость разности в скобках в окрестности $s = 0$, получаем слагаемое -1 . Возвращаясь к (3.1.32), получаем слагаемое $-\frac{1}{2}v(t)$, что и даёт (3.1.30).

Из представления (3.1.29) и условия $v(-t, t) = 0$ получаем

$$0 = F(-t, t) + \lim_{x \rightarrow -t-0} \Phi_2(x, t).$$

Подставляя (3.1.30), приходим к уравнению

$$v(t) - \int_{-\infty}^t (w_0(-t - \tau, t - \tau) - w_0(t - \tau, t - \tau))v(\tau) d\tau = 2F(-t, t), t < 0.$$

То есть получаем уравнение Вольтерра второго рода:

$$v(t) - \int_{-\infty}^t K(t, \tau)v(\tau) d\tau = 2F(-t, t), t < 0, \quad (3.1.34)$$

где

$$K(t, \tau) = w_0(-t - \tau, t - \tau) - w_0(t - \tau, t - \tau). \quad (3.1.35)$$

Поскольку область Ω вырождается в точку $(0,0)$ при $t \rightarrow 0^-$, непрерывность u на $\bar{\Omega}$ требует согласование граничных значений на двух сторонах:

(B1) $\varphi, \psi \in C((-\infty, 0])$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \psi(t) =: \varphi_0;$$

(B2) $\varphi, \psi \in C((-\infty, 0]) \cap L_1((-\infty, 0))$.

Предполагаем, что $\tilde{f} \in C(\bar{\Omega})$, и выполнены следующие оценки (везде $t < 0$ и $0 \leq x, \xi \leq -t$):

(F1) (Гёльдеровость по пространству) существуют $q_* \in (0, 1]$ и $\sigma_4 > 1 + q_*$ такие, что

$$|\tilde{f}(x, t) - \tilde{f}(\xi, t)| \leq C(-t)^{-\sigma_4} |x - \xi|^{q_*};$$

(F2) (Убывание при $t \rightarrow -\infty$) существует $\sigma_3 > 2 + \beta$ такое, что

$$\sup_{(x,t) \in \Omega} (-t)^{\sigma_3} |\tilde{f}(x, t)| < \infty.$$

При этих предположениях объёмный потенциал F определён формулой (3.1.19) и непрерывен в $\bar{\Omega}$.

Лемма 3.1.6. Пусть $0 < \beta < \frac{1}{2}$, тогда для любого $\theta \in (0, 1]$ существует $C = C(\beta, \theta) > 0$ такое, что

$$0 \leq w_0(x, t) \leq Cx^{-\theta} t^{\beta\theta-1}, \quad x > 0, t > 0. \quad (3.1.36)$$

Следующая формула используется при оценках оператора Вольтерра.

Лемма 3.1.7. Пусть $0 < \beta < \frac{1}{2}$. Тогда для $s > 0$ справедливо

$$w_0(s, s) = -\frac{\beta}{1-\beta} \frac{d}{ds} w_1(s, s) \quad (3.1.37)$$

и, следовательно,

$$\int_0^\infty w_0(s, s) ds = \frac{\beta}{1-\beta}. \quad (3.1.38)$$

Доказательство. Из определения (3.1.10) при $x = t = s$ получаем ряды:

$$w_1(s, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^{(1-\beta)k}}{k! \Gamma(1 - \beta k)}, \quad w_0(s, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k s^{(1-\beta)k-1}}{k! \Gamma(-\beta k)}.$$

Дифференцируя $w_1(s, s)$ почленно и используя тождество $\Gamma(1 - \beta k) = (-\beta k)\Gamma(-\beta k)$, получаем (3.1.37). Интегрируя (3.1.37) по $(0, \infty)$ и учитывая, что $w_1(s, s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, а $w_1(0, 0) = 1$, получаем (3.1.38).

Функциональное пространство и оператор Вольтерра

Зафиксируем $T_1 < 0$ и выберем $\delta_2 > 1 - 2\beta$. Определим банахово пространство

$$Q(T_1) = \left\{ v: (-\infty, T_1] \rightarrow \mathbb{R}: v \in C((-\infty, T_1]) \cap L_1((-\infty, T_1]), \right. \\ \left. \lim_{t \rightarrow -\infty} (-t)^{\delta_2} v(t) = 0 \right\}$$

с нормой

$$\|v\|_Q = \underbrace{\sup_{t \leq T_1} |(-t)^{\delta_2} v(t)|}_{\|v\|_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{T_1} |v(t)| dt}_{\|v\|_2}. \quad (3.1.39)$$

На $(-\infty, T_1]$ введём оператор

$$(Av)(t) = \int_{-\infty}^t K(t, \tau) v(\tau) d\tau, \quad t \leq T_1, \quad (3.1.40)$$

где K задано (3.1.35).

Предложение 3.1.1. Пусть $0 < \beta < \frac{1}{2}$. Тогда:

1. оператор A отображает $Q(T_1)$ в $Q(T_1)$;
2. существуют $\theta \in (0, 1]$ и $C > 0$ такие, что для любых $v_1, v_2 \in Q(T_1)$

выполнено

$$\|Av_1 - Av_2\|_Q \leq q(T_1) \|v_1 - v_2\|_Q, \quad q(T_1) = \frac{\beta}{1 - \beta} + C(-T_1)^{-\theta(1-\beta)}.$$

В частности, при достаточно большом $|T_1|$ выполняется $q(T_1) < 1$, и A является сжимающим.

Доказательство. Пусть $\delta v = v_1 - v_2$. Так как $w_0 \geq 0$, имеем

$$|K(t, \tau)| \leq w_0(t - \tau, t - \tau) + w_0(-t - \tau, t - \tau) =: w_-(t - \tau) + w_+(t, \tau).$$

Для $t \leq T_1$ и $\tau \leq t$ имеем $(-t)^{\delta_2} (-\tau)^{-\delta_2} \leq 1$, следовательно

$$(-t)^{\delta_2} |(A\delta v)(t)| \leq \|\delta v\|_1 \int_{-\infty}^t |K(t, \tau)| d\tau \leq \|\delta v\|_1 \int_{-\infty}^t (w_- + w_+) d\tau,$$

$$\int_{-\infty}^t w_-(t - \tau) d\tau = \int_0^\infty w_0(s, s) ds = \frac{\beta}{1 - \beta}.$$

Далее, используя замену $s = t - \tau > 0$, получаем

$$\int_{-\infty}^t w_+(t, \tau) d\tau = \int_0^\infty w_0(s - 2t, s) ds \leq C \int_0^\infty (s + 2(-t))^{-\theta} s^{\beta\theta - 1} ds$$

$$\leq C_1 (-t)^{-\theta(1-\beta)}.$$

Отсюда для $t \leq T_1$:

$$\|A\delta v\|_1 \leq \left(\frac{\beta}{1 - \beta} + C_1 (-T_1)^{-\theta(1-\beta)} \right) \|\delta v\|_1.$$

Имеем,

$$\|A\delta v\|_2 \leq \int_{-\infty}^{T_1} \int_{-\infty}^t |K(t, \tau)| |\delta v(\tau)| d\tau dt = \int_{-\infty}^{T_1} |\delta v(\tau)| \left(\int_\tau^{T_1} |K(t, \tau)| dt \right) d\tau.$$

Для части w_- :

$$\int_\tau^{T_1} w_-(t - \tau) dt = \int_0^{T_1 - \tau} w_0(s, s) ds \leq \frac{\beta}{1 - \beta}.$$

Для части w_+ по оценке $-t - \tau \geq -T_1 - \tau$ при $\tau \leq t \leq T_1$:

$$w_0(-t - \tau, t - \tau) \leq C (-T_1 - \tau)^{-\theta} (t - \tau)^{\beta\theta - 1}.$$

Поэтому

$$\int_\tau^{T_1} w_0(-t - \tau, t - \tau) dt \leq C (-T_1 - \tau)^{-\theta} \int_0^{T_1 - \tau} s^{\beta\theta - 1} ds \leq C' (-T_1 - \tau)^{-\theta(1-\beta)}$$

$$\leq C'' (-T_1)^{-\theta(1-\beta)}.$$

Отсюда

$$\|A\delta v\|_2 \leq \left(\frac{\beta}{1 - \beta} + C_2 (-T_1)^{-\theta(1-\beta)} \right) \|A\delta v\|_2.$$

Складывая оценки и обозначив $C = \max\{C_1, C_2\}$, получаем заявленную оценку с $q(T_1)$. Наконец, непрерывность и условие $\lim_{t \rightarrow -\infty} (-t)^{\delta_2} (Av)(t) = 0$ следуют из полученных равномерных оценок и по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, значит $Av \in Q(T_1)$.

При достаточно большом $|T_1|$ уравнение

$$v(t) = Av(t) + 2F(-t, t), t \leq T_1$$

имеет единственное решение $v \in Q(T_1)$ по теореме Банаха о неподвижной точке. Для $t \in [T_1, 0]$ уравнение (3.1.34) приводится к уравнению Вольтерра второго рода со слабо сингулярным ядром порядка $\beta \in (0, 1/2)$:

$$v(t) - \int_{T_1}^t \frac{H(t, \tau)}{(t - \tau)^\beta} v(\tau) d\tau = \mathcal{F}(t),$$

где $H(t, \tau) = (t - \tau)^\beta K(t, \tau)$ непрерывна на треугольнике $T_1 \leq \tau < t \leq 0$, а $\mathcal{F}(t) = 2F(-t, t) + \int_{-\infty}^{T_1} K(t, \tau) v(\tau) d\tau$ непрерывна на $[T_1, 0]$. Из теории уравнений Вольтерра следует существование и единственность непрерывного решения на $[T_1, 0]$. Объединяя решения, получаем функцию $v \in C((-\infty, 0])$, удовлетворяющую (3.1.34) при всех $t < 0$.

Основной результат

Теорема 3.1.1. Пусть $0 < \alpha < 1, \beta = \alpha/2$. Пусть граничные функции φ, ψ удовлетворяют (B1)-(B2), а функция \tilde{f} задана (3.1.9) и удовлетворяет (F1)-(F2). Тогда существует регулярное решение задачи (3.1.1), (3.1.3), причём оно имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi(t) - \frac{x}{t} (\psi(t) - \varphi(t)) + v(x, t), & (x, t) \in \Omega \\ v(x, t) &= F(x, t) + \Phi_2(x, t), \\ F(x, t) &= \int_{-\infty}^t \int_0^{-\tau} \tilde{f}(\xi, \tau) \frac{1}{2} (w_\beta(|x - \xi|, t - \tau) - w_\beta(x + \xi, t - \tau)) d\xi d\tau, \\ \Phi_2(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t v(\tau) (w_0(x - \tau, t - \tau) - w_0(-\tau - x, t - \tau)) d\tau, \end{aligned}$$

где плотность $v \in C((-\infty, 0])$ является решением уравнения Вольтерра второго рода

$$v(t) - \int_{-\infty}^t (w_0(-t - \tau, t - \tau) - w_0(t - \tau, t - \tau)) v(\tau) d\tau = 2F(-t, t), \quad t < 0.$$

3.2 Краевая задача Дирихле для дробного диффузионного уравнения с правосторонней производной Лиувилля в вырожденной угловой области

Задача 3.2.1. В области:

$$Q = \{(x, t): 0 < x < t, t > 0\},$$

найти решение дробно-диффузионного уравнения

$$\mathbf{M}[u] \equiv D_{\infty t}^{\gamma} u(x, t) - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), \gamma \in (0, 1), \beta = \frac{\gamma}{2}, \quad (3.2.1)$$

удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=t} = 0, \quad (3.2.2)$$

где $(1+t)^r u(x, t) \in C(Q) \cap L_{\infty}(Q)$ и $(1+t)^{\rho} f(x, t) \in C(Q) \cap L_{\infty}(Q)$, при $r > 1 - \gamma$ и $\rho > \gamma$, $u_{xx}, u_t \in C(Q)$.

Теорема 3.2.1. Если выполнены условия $(1+t)^r u(x, t) \in C(Q) \cap L_{\infty}(Q)$ и $(1+t)^{\rho} f(x, t) \in C(Q) \cap L_{\infty}(Q)$, при $r > 1 - \gamma$ и $\rho > \gamma$, $u_{xx}, u_t \in C(Q)$, то решение задачи (3.2.1), (3.2.2) существует, единственно и имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_t^{\infty} \psi(\tau) [-w(\tau - x, (\tau - t)) + w(\tau + x, (\tau - t))] d\tau + \mathcal{F}(x, t), \quad (3.2.3)$$

где

$$\mathcal{F}(x, t) = \int_t^{\infty} \int_0^{\tau} f(\xi, \tau) \mathcal{E}_{\beta}(x, \xi; \tau - t) d\xi d\tau$$

$$\mathcal{E}_{\beta}(x, \xi; \tau - t) = \frac{1}{2} [w_{\beta}(|x - \xi|, (\tau - t)) - w_{\beta}(|x + \xi|, (\tau - t))]$$

$\psi(t) \in C(0, \infty) \cap L_{\infty}(0, \infty)$ - решение интегрального уравнения

$$\psi(t) + \int_t^{\infty} K(\tau, t) \psi(\tau) d\tau = 2\mathcal{F}(t, t), \quad (3.2.4)$$

где

$$K(\tau, t) = w_0(\tau - t, (\tau - t)) - w_0(\tau + t, (\tau - t)), \quad \tau > t > 0.$$

Замечание 3.2.1. В силу оценок для функции $w(x, t)$ интегральное уравнение (3.2.4) является уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью и, следовательно, однозначно разрешимо.

О скачке потенциала двойного слоя

Сначала покажем, что справедливо равенство:

$$\int_t^\infty w_0(t-x, (\tau-t))d\tau = 1. \quad (3.2.5)$$

Действительно, используя подстановки

$$\begin{aligned} z &= \frac{t-x}{(\tau-t)^\beta}; dz = -\beta \frac{t-x}{(\tau-t)^{\beta+1}} d\tau \\ (\tau-t)^\beta &= \frac{t-x}{z}; d\tau = (t-x)^{\frac{1}{\beta}} \left(-\frac{1}{\beta}\right) \frac{1}{z^{\frac{1}{\beta}+1}} dz. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} &\int_t^\infty w_0(t-x, (\tau-t))d\tau = \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{\beta}}}{(t-x)^{\frac{1}{\beta}}} \frac{(t-x)^{\frac{1}{\beta}}}{z^{\frac{1}{\beta}+1}} e_{1,\beta}^{1,0} \left(-\frac{z}{1}\right) dz = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \frac{1}{z} e_{1,\beta}^{1,0} \left(-\frac{z}{1}\right) dz = \frac{\beta}{\beta} = 1. \end{aligned}$$

Лемма 3.2.1. Пусть $\psi(t) \in C(0, \infty) \cap L_\infty(0, \infty)$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow t-0} \int_t^\infty w_0(\tau-x, \tau-t)\psi(\tau)d\tau = \psi(t) + \int_t^\infty w_0(\tau-t, \tau-t)\psi(\tau)d\tau.$$

Доказательство. Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\begin{aligned} &\int_t^\infty \psi(\tau)[w_0(\tau-x, \tau-t) - w_0(t-x, \tau-t)]d\tau + \int_t^\infty \psi(\tau)w_0(t-x, \tau-t)d\tau \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Учитывая оценку для функции Райта, имеем, что предел $x \rightarrow t$ можно выполнить в интеграле I_1 под знаком интеграла. Учитывая, что $w(0, t) = 0$, получаем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow t \\ x < t}} I_1 = \int_t^\infty \psi(\tau)w(\tau-t, \tau-t)d\tau.$$

Для оценки интеграла I_2 рассмотрим выражение:

$$I_2 = \int_t^\infty [\psi(\tau) - \psi(t)]w_0(t-x, \tau-t)d\tau + \psi(t) \int_t^\infty w_0(t-x, \tau-t)d\tau \\ = I_{21} + I_{22}.$$

Так как $\psi(\tau)$ справа непрерывна в точке $\tau = t$ и в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$, получаем

$$\lim_{x \rightarrow t} I_{21} = \lim_{x \rightarrow t} \left[\int_t^{t+\varepsilon} (\psi(\tau) - \psi(t))w_0(t-x, \tau-t)d\tau + \int_{t+\varepsilon}^\infty (\psi(\tau) - \psi(t))w_0(t-x, \tau-t)d\tau \right] = 0.$$

Далее, учитывая (3.2.5):

$$I_{22} = \psi(t) \int_t^\infty w_0(t-x, \tau-t)d\tau = \psi(t).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2.2. Пусть $0 < \beta < 1$, $\psi \in C(0, \infty) \cap L_\infty(0, \infty)$. Тогда для любого фиксированного $t > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow t-0} \int_t^\infty w_0(\tau-x, \tau-t)\psi(\tau)d\tau \\ = \psi(t) + \int_t^\infty w_0(\tau-t, \tau-t)\psi(\tau)d\tau. \quad (3.2.6)$$

Доказательство. Зафиксируем $t > 0$ и положим $\varepsilon = t-x > 0, s = \tau-t \in (0, \infty)$. Тогда $\tau-x = s+\varepsilon$ и

$$I(\varepsilon) := \int_t^\infty w_0(\tau-x, \tau-t)\psi(\tau)d\tau = \int_0^\infty w_0(s+\varepsilon, s)\psi(t+s)ds. \quad (3.2.7)$$

Добавим и вычтем $w_0(\varepsilon, s)$ под знаком интеграла:

$$I(\varepsilon) = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) \quad (3.2.8)$$

где

$$I_1(\varepsilon) := \int_0^\infty \psi(t+s)[w_0(s+\varepsilon, s) - w_0(\varepsilon, s)]ds \quad (3.2.9)$$

$$I_2(\varepsilon) := \int_0^\infty \psi(t+s)w_0(\varepsilon, s)ds. \quad (3.2.10)$$

Исследуем предел для $I_2(\varepsilon)$, отметим, что $w_0(0, s) = 0$ для $s > 0$, поскольку $\phi(-\beta, 0; 0) = 0$. Кроме того, известно (см., например, [19]), что при любом $\varepsilon > 0$ выполняется нормировка

$$\int_0^\infty w_0(\varepsilon, s)ds = 1. \quad (3.2.11)$$

Следовательно,

$$I_2(\varepsilon) - \psi(t) = \int_0^\infty (\psi(t+s) - \psi(t))w_0(\varepsilon, s)ds. \quad (3.2.12)$$

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$ и разложим интеграл на $(0, \delta) \cup (\delta, \infty)$:

$$\begin{aligned} |I_2(\varepsilon) - \psi(t)| &\leq \int_0^\delta |\psi(t+s) - \psi(t)|w_0(\varepsilon, s)ds + \\ &+ \int_\delta^\infty |\psi(t+s) - \psi(t)|w_0(\varepsilon, s)ds \\ &\leq \omega_t(\delta) \int_0^\infty w_0(\varepsilon, s)ds + 2\|\psi\|_\infty \int_\delta^\infty w_0(\varepsilon, s)ds \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

где $\omega_t(\delta) := \sup_{0 \leq s \leq \delta} |\psi(t+s) - \psi(t)| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0+$ (по непрерывности ψ в точке t). В силу (3.2.11) первый множитель равен $\omega_t(\delta)$.

Покажем, что при фиксированном $\delta > 0$

$$\int_\delta^\infty w_0(\varepsilon, s)ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0. \quad (3.2.14)$$

Действительно, делая замену $u = \varepsilon/s^\beta$ (то есть $s = (\varepsilon/u)^{1/\beta}$ и $ds/s = -(1/\beta)du/u$), получаем

$$\int_\delta^\infty w_0(\varepsilon, s)ds = \frac{1}{\beta} \int_0^{\varepsilon/\delta^\beta} \frac{1}{u} \phi(-\beta, 0; -u)du. \quad (3.2.15)$$

Так как $\phi(-\beta, 0; 0) = 0$ и ϕ аналитична, то $\phi(-\beta, 0; -u) = O(u)$ при $u \rightarrow 0+$, следовательно подынтегральная функция $\frac{1}{u} \phi(-\beta, 0; -u)$ ограничена в

окрестности нуля, а потому правая часть (3.2.15) стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0+$, что и доказывает (3.2.14). Из (3.2.13)-(3.2.14) заключаем:

$$I_2(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \psi(t). \quad (3.2.16)$$

Теперь исследуем предел для $I_1(\varepsilon)$, для каждого фиксированного $s > 0$ имеем поточечную сходимость

$$w_0(s + \varepsilon, s) - w_0(\varepsilon, s) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} w_0(s, s) - w_0(0, s) = w_0(s, s). \quad (3.2.17)$$

Остаётся обосновать предельный переход под знаком интеграла в (3.2.9). Для этого построим интегрируемую мажоранту, не зависящую от ε (для $\varepsilon \in (0,1]$).

По формуле дифференцирования функции Райта имеем

$$\frac{\partial}{\partial a} w_0(a, s) = -\frac{1}{s^{\beta+1}} \phi\left(-\beta, -\beta; -\frac{a}{s^\beta}\right). \quad (3.2.18)$$

По теореме Лагранжа для некоторого $\theta = \theta(s, \varepsilon) \in (0,1)$:

$$w_0(s + \varepsilon, s) - w_0(\varepsilon, s) = s \frac{\partial}{\partial a} w_0(a, s) \Big|_{a=\varepsilon+\theta s}. \quad (3.2.19)$$

Поскольку функция $z \mapsto \phi(-\beta, -\beta; -z)$ непрерывна на $[0, \infty)$ и убывает при $z \rightarrow \infty$ (по асимптотике Райта), то

$$M := \sup_{z \geq 0} |\phi(-\beta, -\beta; -z)| < \infty. \quad (3.2.20)$$

Получаем

$$|w_0(s + \varepsilon, s) - w_0(\varepsilon, s)| \leq s \cdot \frac{M}{s^{\beta+1}} = Ms^{-\beta}, 0 < s \leq 1. \quad (3.2.21)$$

Так как $0 < \beta < 1$, функция $s^{-\beta}$ интегрируема на $(0,1)$.

Из неравенства треугольника имеем

$$|w_0(s + \varepsilon, s) - w_0(\varepsilon, s)| \leq w_0(s + \varepsilon, s) + w_0(\varepsilon, s). \quad (3.2.22)$$

Для второго слагаемого при $s \geq 1$ и $\varepsilon \in (0,1]$ аргумент $u = \varepsilon/s^\beta \in (0,1]$, и из аналитичности $\phi(-\beta, 0; z)$ с условием $\phi(-\beta, 0; 0) = 0$ следует оценка $|\phi(-\beta, 0; -u)| \leq Cu$ на $[0,1]$, откуда

$$w_0(\varepsilon, s) = \frac{1}{s} \left| \phi \left(-\beta, 0; -\frac{\varepsilon}{s^\beta} \right) \right| \leq \frac{C}{s} \cdot \frac{\varepsilon}{s^\beta} \leq C s^{-\beta-1}, s \geq 1. \quad (3.2.23)$$

Для первого слагаемого при $s \geq 1$ имеем $\frac{s+\varepsilon}{s^\beta} \geq s^{1-\beta} \geq 1$, и по асимптотике Райта существует $C_1, c_1 > 0$ такие, что

$$w_0(s + \varepsilon, s) \leq C_1 e^{-c_1 s}, s \geq 1. \quad (3.2.24)$$

Отсюда следует существование функции $h \in L^1(0, \infty)$, не зависящей от $\varepsilon \in (0, 1]$, такой что

$$|\psi(t + s)(w_0(s + \varepsilon, s) - w_0(\varepsilon, s))| \leq \|\psi\|_\infty h(s), s > 0. \quad (3.2.25)$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$I_1(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^\infty w_0(s, s) \psi(t + s) ds. \quad (3.2.26)$$

Суммируя, получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} I(\varepsilon) = \psi(t) + \int_0^\infty w_0(s, s) \psi(t + s) ds$$

Возвращаясь к переменной $\tau = t + s$, приходим к (3.2.6). Лемма доказана. Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 3.2.3. Пусть $\psi(t) \in C(0, \infty) \cap L_\infty(0, \infty)$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_t^\infty w_0(x, \tau - t) \varphi(\tau) d\tau = \varphi(t) + \int_t^\infty w_0(0, \tau - t) \varphi(\tau) d\tau = \varphi(t).$$

Сведение краевой задачи к интегральному уравнению

При решении первой краевой задачи используем производную фундаментального решения на границе области, то есть на прямых $\xi = 0; \xi = \tau$. Получаем

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{E}_\beta(x, \xi, \eta) \right|_{\xi=0} = w_0(x, \eta),$$

а также

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi} \varepsilon_{\beta}(x, \xi, \eta) \right|_{\xi=\tau} = \frac{1}{2} [-w_0(\tau - x, \eta) + w_0(\tau + x, \eta)].$$

Ищем решение задачи (3.2.1), (3.2.2) в виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_t^{\infty} \psi(\tau) [w_0(\tau + x, \tau - t) - w_0(\tau - x, \tau - t)] d\tau + \mathcal{F}(x, t),$$

где

$$\mathcal{F}(x, t) = \int_t^{\infty} \int_0^{\tau} f(\xi, \tau) \varepsilon_{\beta}(x, \xi; \tau - t) d\xi d\tau.$$

Здесь

$$w_0(x, t) = \frac{1}{t} \phi \left(-\beta, 0, -\frac{|x|}{t^{\beta}} \right),$$

а $\psi(\tau)$ - пока неизвестная функция. Удовлетворяя краевым условиям и используя результаты лемм, получаем:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} u(x, t) = \varphi(t) + \mathcal{F}(0, t) = 0,$$

так как $\mathcal{F}(0, t) = 0$, следовательно $\varphi(t) = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow t-0 \\ x > 0}} u(x, t) &= -\frac{1}{2} \left[\int_t^{\infty} \psi(\tau) w_0(\tau - t, \tau - t) d\tau + \psi(t) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_t^{\infty} \psi(\tau) w_0(\tau + t, \tau - t) d\tau = -F(t, t). \end{aligned}$$

Заменим переменную η на τ . Получаем следующее интегральное уравнение:

$$\psi(t) + \int_t^{\infty} K(\tau, t) \psi(\tau) d\tau = 2F(t), \quad (3.2.27)$$

где

$$\begin{aligned} K(\tau, t) &= K_-(\tau, t) - K_+(\tau, t) \\ K_+(\tau, t) &= w_0(\tau + t, \tau - t), K_-(\tau, t) = w_0(\tau - t, \tau - t), F(t) = \mathcal{F}(t, t). \end{aligned}$$

Решение интегрального уравнения

Теорема 3.2.2. Для любой функции $F(t) \in C(0, \infty) \cap L_\infty(0, \infty)$, интегральное уравнение (3.2.27) имеет единственное решение в классе функций $\psi(t) \in C(0, \infty) \cap L_\infty(0, \infty)$, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Доказательство. Используя оценку, имеем

$$|K_+(\tau, t)| \leq C(\beta, \theta)(\tau + t)^{-\theta}(\tau - t)^{\beta\theta - 1} = C(\beta, \theta) \frac{1}{[2t + (\tau - t)]^\theta (\tau - t)^{1 - \beta\theta}}$$

$$0 < \theta < \frac{1}{\beta}.$$

Отсюда получаем

$$\int_t^\infty |K_+(\tau, t)| \leq C(\beta, \theta) \int_t^\infty \frac{(\tau - t)^{\beta\theta - 1}}{[2t + (\tau - t)]^\theta} d\tau =$$

$$= \frac{C(\beta, \theta)}{(2t)^{\theta(1 - \beta)}} \frac{\Gamma(\beta\theta)\Gamma(\theta(1 - \beta))}{\Gamma(\theta)}.$$

Таким образом,

$$\int_t^\infty |K_+(\tau, t)| d\tau \leq \frac{C(\beta, \theta)}{2^{\theta(1 - \beta)}} \frac{1}{t^{\theta(1 - \beta)}} \frac{\Gamma(\beta\theta)\Gamma(\theta(1 - \beta))}{\Gamma(\theta)}. \quad (3.2.28)$$

Теперь вычислим

$$\int_t^\infty K_-(\tau, t) d\tau = \int_t^\infty w_0(\tau - t, \tau - t) d\tau = \int_t^\infty \frac{1}{\tau - t} e_{1, \beta}^{1, 0} \left[-\frac{(\tau - t)^{1 - \beta}}{1} \right] d\tau$$

совершая подстановку $(\tau - t)^{1 - \beta} = z$ и используя формулу [19], получаем

$$\int_0^\infty \frac{1}{z^{\frac{1}{1 - \beta}}} \frac{1}{1 - \beta} \cdot z^{\frac{1}{1 - \beta} - 1} e_{1, \beta}^{1, 0} \left(-\frac{z}{1} \right) dz =$$

$$\frac{1}{1 - \beta} \int_0^\infty \frac{1}{z} e_{1, \beta}^{1, 0} \left(-\frac{z}{1} \right) dz = \frac{\beta}{1 - \beta} < 1. \quad (3.2.29)$$

Из неравенств (3.2.28), (3.2.29) следует справедливость теоремы.

Теорема 3.2.3. Пусть $0 < \beta < \frac{1}{2}$, $F \in C(0, \infty) \cap L_\infty(0, \infty)$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\psi(t) + \int_t^\infty K(\tau, t)\psi(\tau)d\tau = F(t), t > 0 \quad (3.2.30)$$

с ядром

$$K(\tau, t) = K_-(\tau, t) - K_+(\tau, t), K_-(\tau, t) = w_0(\tau - t, \tau - t), K_+(\tau, t) = w_0(\tau + t, \tau - t),$$

где

$$w_0(a, s) = \frac{1}{s} \phi\left(-\beta, 0; -\frac{a}{s^\beta}\right), a \geq 0, s > 0. \quad (3.2.31)$$

Тогда уравнение (3.2.30) имеет единственное решение $\psi \in C(0, \infty) \cap L_\infty(0, \infty)$. Кроме того, существует $T > 0$ такое, что решение может быть построено методом последовательных приближений:

(i) на полуоси $[T, \infty)$ как предел последовательности

$$\psi_{T,0}(t) = F(t), \psi_{T,n+1}(t) = F(t) - \int_t^\infty K(\tau, t)\psi_{T,n}(\tau)d\tau, t \geq T, \quad (3.2.32)$$

сходящейся равномерно на $[T, \infty)$;

(ii) на отрезке $(0, T]$ как предел последовательности

$$\psi_0(t) = \tilde{F}(t), \psi_{n+1}(t) = \tilde{F}(t) - \int_t^T K(\tau, t)\psi_n(\tau)d\tau, 0 < t \leq T \quad (3.2.33)$$

сходящейся равномерно на каждом $[\delta, T], \delta > 0$, где функция \tilde{F} определяется формулой

$$\tilde{F}(t) = F(t) - \int_T^\infty K(\tau, t)\psi_T(\tau)d\tau, 0 < t \leq T \quad (3.2.34)$$

а ψ_T есть решение (3.2.30) на $[T, \infty)$.

Доказательство. Получим оценки для K_-, K_+ . Поскольку $w_0(\cdot, \cdot) \geq 0$, имеем $\int_t^\infty |K_-(\tau, t)|d\tau = \int_t^\infty K_-(\tau, t)d\tau$. Положив $s = \tau - t$, получаем

$$\int_t^\infty K_-(\tau, t)d\tau = \int_0^\infty w_0(s, s)ds. \quad (3.2.35)$$

Далее, так как $w_0(s, s) = \frac{1}{s} \phi(-\beta, 0; -s^{1-\beta})$, подстановкой $z = s^{1-\beta}$ находим

$$\int_0^{\infty} w_0(s, s) ds = \frac{1}{1-\beta} \int_0^{\infty} \frac{1}{z} \phi(-\beta, 0; -z) dz = \frac{\beta}{1-\beta}. \quad (3.2.36)$$

Таким образом,

$$\int_t^{\infty} |K_-(\tau, t)| d\tau = \frac{\beta}{1-\beta} < 1 \quad \left(0 < \beta < \frac{1}{2}\right). \quad (3.2.37)$$

Далее используем стандартную оценку для функции w_0 : при любом $0 < \theta < \frac{1}{\beta}$ существует константа $C(\beta, \theta) > 0$ такая, что

$$|w_0(x, s)| \leq C(\beta, \theta) x^{-\theta} s^{\beta\theta-1}, \quad x > 0, s > 0. \quad (3.2.38)$$

Тогда при $\tau > t > 0$ имеем

$$|K_+(\tau, t)| = w_0(\tau + t, \tau - t) \leq C(\beta, \theta) (\tau + t)^{-\theta} (\tau - t)^{\beta\theta-1}.$$

Следовательно, после замены $\tau = t + s$ получаем

$$\begin{aligned} \int_t^{\infty} |K_+(\tau, t)| d\tau &\leq C(\beta, \theta) \int_0^{\infty} (2t + s)^{-\theta} s^{\beta\theta-1} ds \\ &= \frac{C(\beta, \theta)}{2^{\theta(1-\beta)}} t^{-\theta(1-\beta)} \frac{\Gamma(\beta\theta)\Gamma(\theta(1-\beta))}{\Gamma(\theta)} =: C_+(\beta, \theta) t^{-\theta(1-\beta)}. \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

Зафиксируем $\theta \in \left(0, \frac{1}{\beta}\right)$ и выберем $T > 0$ настолько большим, чтобы

$$q_T := \frac{\beta}{1-\beta} + \sup_{t \geq T} \int_t^{\infty} |K_+(\tau, t)| d\tau \leq \frac{\beta}{1-\beta} + C_+(\beta, \theta) T^{-\theta(1-\beta)} < 1. \quad (3.2.40)$$

Рассмотрим банахово пространство $X_T := C_b([T, \infty))$ с нормой $\|\varphi\|_{X_T} := \sup_{t \geq T} |\varphi(t)|$ и оператор

$$(\mathcal{A}\varphi)(t) := \int_t^{\infty} K(\tau, t) \varphi(\tau) d\tau, \quad t \geq T$$

Из (3.2.37), (3.2.39) и (3.2.40) следует оценка

$$\|\mathcal{A}\varphi\|_{X_T} \leq q_T \|\varphi\|_{X_T}, \quad \varphi \in X_T.$$

Следовательно, отображение $\Phi(\varphi) := F - \mathcal{A}\varphi$ является сжимающим на X_T , а потому уравнение (3.2.30) имеет на $[T, \infty)$ единственное решение $\psi_T \in X_T$. При этом последовательность (3.2.32) есть итерации отображения Φ и сходится к ψ_T равномерно на $[T, \infty)$.

Пусть ψ_T найдено на $[T, \infty)$. Для $0 < t \leq T$ разложим интеграл:

$$\int_t^\infty K(\tau, t)\psi(\tau)d\tau = \int_t^T K(\tau, t)\psi(\tau)d\tau + \int_T^\infty K(\tau, t)\psi_T(\tau)d\tau.$$

Переносим второе слагаемое в правую часть, получаем эквивалентное уравнение на $(0, T]$:

$$\psi(t) + \int_t^T K(\tau, t)\psi(\tau)d\tau = \tilde{F}(t), \quad 0 < t \leq T \quad (3.2.41)$$

где \tilde{F} задана формулой (3.2.34). Заметим, что $\tilde{F} \in C(0, T] \cap L_\infty(0, T]$: действительно, при $\tau \geq T$ и $t \in (0, T]$ подынтегральная функция непрерывна по t и интегрируема по τ , поэтому непрерывность и ограниченность \tilde{F} следуют из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Зафиксируем $0 < \delta < T$ и рассмотрим уравнение (3.2.41) на отрезке $[\delta, T]$. Положим $s = \tau - t \in (0, T - \delta]$.

(а) Оценка $K_-(\tau, t)$ при $s \rightarrow 0 +$:

$$s^\beta w_0(s, s) = s^{\beta-1} \phi(-\beta, 0; -s^{1-\beta}) = -\frac{1}{\Gamma(-\beta)} + O(s^{1-\beta})$$

то есть функция $s \mapsto s^\beta w_0(s, s)$ имеет конечный предел при $s \rightarrow 0 +$ и непрерывна на $(0, T]$. Следовательно,

$$M_- := \sup_{0 < s \leq T} s^\beta w_0(s, s) < \infty, \Rightarrow |K_-(\tau, t)| \leq M_-(\tau - t)^{-\beta}.$$

(б) Для $t \in [\delta, T]$ и $\tau \in [t, T]$ имеем $x := \tau + t \in [2\delta, 2T]$, $K_+(\tau, t)$ на $[\delta, T]$ при фиксированном $x \geq 2\delta > 0$ при $s \rightarrow 0 +$ аргумент $\frac{x}{s^\beta} \rightarrow \infty$, и по асимптотике функции Райта существует оценка вида

$$\left| \phi\left(-\beta, 0; -\frac{x}{s^\beta}\right) \right| \leq C \left(\frac{x}{s^\beta}\right)^\kappa \exp\left(-c \left(\frac{x}{s^\beta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right) \quad (s \text{ достаточно мало})$$

где $C, c, \kappa > 0$ не зависят от $x \in [2\delta, 2T]$. Отсюда

$$|s^\beta w_0(x, s)| \leq C s^{\beta-1-\beta\kappa} \exp\left(-c_0 s^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\right) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} 0$$

равномерно по $x \in [2\delta, 2T]$. Положив $s^\beta w_0(x, s) = 0$, получаем непрерывность на компакте $[2\delta, 2T] \times [0, T]$, а значит ограниченность:

$$M_+(\delta, T) := \max_{2\delta \leq x \leq 2T, 0 \leq s \leq T} |H_\delta(x, s)| < \infty.$$

Следовательно,

$$|K_+(\tau, t)| \leq M_+(\delta, T)(\tau - t)^{-\beta}, \quad t \in [\delta, T], \tau \in [t, T].$$

Из (a)-(b) получаем для $t \in [\delta, T], \tau \in [t, T]$:

$$|K(\tau, t)| \leq |K_-(\tau, t)| + |K_+(\tau, t)| \leq C_{\delta, T}(\tau - t)^{-\beta}, \quad C_{\delta, T} := M_- + M_+(\delta, T).$$

Пусть оператор S задан на $C([\delta, T])$ формулой

$$(S\varphi)(t) = \int_t^T K(\tau, t)\varphi(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$|(S\varphi)(t)| \leq C_{\delta, T} \|\varphi\|_\infty \int_t^T (\tau - t)^{-\beta} d\tau = C_{\delta, T} \|\varphi\|_\infty \frac{(T - t)^{1-\beta}}{1 - \beta}.$$

Положив $A_{\delta, T} := C_{\delta, T} \Gamma(1 - \beta)$ и повторяя стандартную индукцию (с заменой $\tau = t + (T - t)u$ и использованием бета-функции), получаем для $n \geq 1$:

$$\|S^n \varphi\|_{C([\delta, T])} \leq \|\varphi\|_{C([\delta, T])} \frac{A_{\delta, T}^n (T - \delta)^{n(1-\beta)}}{\Gamma(n(1 - \beta) + 1)}.$$

Отсюда следует равномерная сходимость ряда Неймана на $[\delta, T]$ и, значит, существование и единственность решения на $[\delta, T]$. Так как $\delta > 0$ произвольно, получаем решение на $(0, T]$, причём сходимость последовательных приближений имеет место равномерно на каждом $[\delta, T]$.

3.3 Диффузионно-волновая краевая задача

Определение 3.3.1. Пусть $\sigma > 0$. Через $L_\sigma^\infty(0, \infty)$ обозначим пространство измеримых функций $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{\infty, \sigma} := \sup_{t > 0} (1 + t)^\sigma |f(t)|. \quad (3.3.1)$$

Используя (1.2.18), можем выписать случай $1 < \alpha < 2$ имеем $n = 2$, поэтому

$$(D_{\infty t}^{\alpha} f)(t) = \frac{d^2}{dt^2} (I_{\infty t}^{2-\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dt^2} \int_t^{\infty} \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-1}} d\tau. \quad (3.3.2)$$

$$({}^c D_{\infty t}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_t^{\infty} \frac{f''(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-1}} d\tau. \quad (3.3.3)$$

Предложение 3.3.1. Пусть $\beta > 0$, $f \in L_{\sigma}^{\infty}(0, \infty)$ и $\sigma > \beta$. Тогда интеграл (1.2.3) сходится для всех $t > 0$, причём справедлива оценка

$$\left| (I_{\infty t}^{\beta} f)(t) \right| \leq \frac{\Gamma(\sigma - \beta)}{\Gamma(\sigma)} \|f\|_{\infty, \sigma} (1+t)^{\beta-\sigma}, \quad t > 0. \quad (3.3.4)$$

Условие $\sigma > \beta$ является точным в степенном масштабе: при $\sigma = \beta$ для функции $f_*(t) = (1+t)^{-\beta}$ интеграл (1.2.3) расходится логарифмически, а при $\sigma < \beta$ для функции $f_*(t) = (1+t)^{-\sigma}$ он расходится степенным образом.

Доказательство. Из (3.3.1) следует

$$|f(\tau)| \leq \|f\|_{\infty, \sigma} (1+\tau)^{-\sigma},$$

поэтому

$$\left| (I_{\infty t}^{\beta} f)(t) \right| \leq \frac{\|f\|_{\infty, \sigma}}{\Gamma(\beta)} \int_t^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau-t)^{1-\beta} (1+\tau)^{\sigma}}.$$

Подстановкой $\tau = t + s$ получаем

$$\left| (I_{\infty t}^{\beta} f)(t) \right| \leq \frac{\|f\|_{\infty, \sigma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\infty} s^{\beta-1} (1+t+s)^{-\sigma} ds.$$

Далее подстановкой $s = (1+t)r$ выводим

$$\int_0^{\infty} s^{\beta-1} (1+t+s)^{-\sigma} ds = (1+t)^{\beta-\sigma} \int_0^{\infty} r^{\beta-1} (1+r)^{-\sigma} dr.$$

Последний интеграл сходится тогда и только тогда, когда $\sigma > \beta$, и равен

$$B(\beta, \sigma - \beta) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\sigma - \beta)}{\Gamma(\sigma)}.$$

Отсюда следует (3.3.4). Проверим точность условия. Если $f_*(t) = (1 + t)^{-\beta}$, то

$$\left(I_{\infty t}^{\beta} f_*\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\infty} \frac{s^{\beta-1}}{(1+t+s)^{\beta}} ds.$$

При $s \geq 1 + t$ имеем $(1 + t + s)^{\beta} \leq (2s)^{\beta}$, следовательно

$$\frac{s^{\beta-1}}{(1+t+s)^{\beta}} \geq 2^{-\beta} s^{-1}, s \geq 1 + t$$

и интеграл расходится как $\int_{1+t}^{\infty} s^{-1} ds$. Если $\sigma < \beta$ и $f_*(t) = (1 + t)^{-\sigma}$, то

$$\left(I_{\infty t}^{\beta} f_*\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\infty} \frac{s^{\beta-1}}{(1+t+s)^{\sigma}} ds.$$

Для $s \geq 1 + t$ имеем $(1 + t + s)^{\sigma} \leq (2s)^{\sigma}$, поэтому

$$\frac{s^{\beta-1}}{(1+t+s)^{\sigma}} \geq 2^{-\sigma} s^{\beta-1-\sigma}, s \geq 1 + t.$$

Так как $\beta - \sigma > 0$, интеграл расходится, поскольку

$$\int_{1+t}^{\infty} s^{\beta-1-\sigma} ds = +\infty.$$

Предложение доказано.

Определение 3.3.2. Область исследования задаётся равенством

$$Q := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < t, t > 0\}. \quad (3.3.5)$$

Её боковые границы обозначим через

$$\Sigma_0 := \{(0, t): t > 0\}, \Sigma_1 := \{(t, t): t > 0\}. \quad (3.3.6)$$

Определение 3.3.3. Рассмотрим псевдодифференциальное уравнение с частотным символом $p(i\omega, \xi)$, где $\omega, \xi \in \mathbb{R}$. Будем называть его дробно-гиперболическим, если существуют ненулевые вещественные частоты $(\omega, \xi) \neq (0, 0)$, для которых $p(i\omega, \xi) = 0$.

Если таких вещественных характеристик нет, то уравнение будем называть дробно-параболическим. Для рассматриваемого уравнения естественный символ имеет вид

$$p(i\omega, \xi) = (i\omega)^\alpha + \xi^2, 1 < \alpha < 2, \quad (3.3.7)$$

где комплексная степень понимается в главной ветви.

Предложение 3.3.2. Уравнение

$$(D_{\infty t}^\alpha u)(x, t) - u_{xx}(x, t) = f(x, t), (x, t) \in Q, 1 < \alpha < 2 \quad (3.3.8)$$

является дробно-параболическим в смысле предыдущего определения. В частности, граница $\Sigma_1 = \{x = t\}$ не является характеристической в вещественном частотном смысле.

Доказательство. Пусть $(\omega, \xi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Тогда $(i\omega)^\alpha = |\omega|^\alpha \exp\left(i \frac{\pi\alpha}{2} \operatorname{sgn}\omega\right)$ и потому $\operatorname{Im}(i\omega)^\alpha = |\omega|^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \operatorname{sgn}\omega$.

Так как $1 < \alpha < 2$, имеем $\frac{\pi\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) > 0$.

Следовательно, при $\omega \neq 0$ мнимая часть $(i\omega)^\alpha$ отлична от нуля. Но ξ^2 вещественно, значит

$$p(i\omega, \xi) = (i\omega)^\alpha + \xi^2 \neq 0 \text{ при } \omega \neq 0.$$

Если же $\omega = 0$, то $p(0, \xi) = \xi^2$ и равенство $p(0, \xi) = 0$ возможно только при $\xi = 0$. Итак, равенство $p(i\omega, \xi) = 0$ не имеет ненулевых вещественных решений. Следовательно, уравнение дробно-параболическое, а линия Σ_1 не является характеристической. Предложение доказано.

Конструктивный вывод условий на u и f

Определение 3.3.4. Пусть $\sigma > 2 - \alpha$. Через $\mathcal{A}_\sigma(Q)$ обозначим множество непрерывных в Q функций u , для которых конечна величина

$$\|u\|_{\mathcal{A}_\sigma(Q)} := \sup_{(x,t) \in Q} (1+t)^\sigma |u(x,t)| \quad (3.3.9)$$

и выполняется условие

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ t \geq T}} \sup_{(x,t) \in Q} (1+t)^\sigma |u(x,t)| = 0. \quad (3.3.10)$$

Для правой части введём класс

$$\mathcal{F}_\sigma(Q) := \left\{ f \in C(Q) : \|f\|_{\mathcal{F}_\sigma(Q)} := \sup_{(x,t) \in Q} (1+t)^\sigma |f(x,t)| < \infty \right\}. \quad (3.3.11)$$

Предложение 3.3.3. Пусть $u \in \mathcal{A}_\sigma(Q)$. Тогда для каждого фиксированного $x > 0$ функция $t \mapsto u(x, t)$ принадлежит $L_\sigma^\infty(x, \infty)$, а интеграл

$$(I_{\infty t}^{2-\alpha}u)(x, t) := \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_t^{\infty} \frac{u(x, \tau)}{(\tau-t)^{\alpha-1}} d\tau \quad (3.3.12)$$

определён для всех $t > x$ и удовлетворяет оценке

$$|(I_{\infty t}^{2-\alpha}u)(x, t)| \leq \frac{\Gamma(\sigma + \alpha - 2)}{\Gamma(\sigma)} \|u\|_{\mathcal{A}_\sigma(Q)} (1+t)^{2-\alpha-\sigma}. \quad (3.3.13)$$

Доказательство. Для каждого фиксированного $x > 0$ из (3.3.12) следует

$$|u(x, \tau)| \leq \|u\|_{\mathcal{A}_\sigma(Q)} (1+\tau)^{-\sigma}, \tau > x.$$

Поэтому при $\beta = 2 - \alpha$ даёт

$$|(I_{\infty t}^{2-\alpha}u)(x, t)| \leq \frac{\Gamma(\sigma - (2 - \alpha))}{\Gamma(\sigma)} \|u\|_{\mathcal{A}_\sigma(Q)} (1+t)^{2-\alpha-\sigma}.$$

Так как $\sigma - (2 - \alpha) = \sigma + \alpha - 2$, получаем (3.3.13). Предложение доказано.

Теорема 3.3.1. Пусть $\sigma > 2 - \alpha$. Тогда пространство решений однородного уравнения

$$D_{\infty t}^\alpha v = 0 \quad (3.3.14)$$

в классе $L_\sigma^\infty(0, \infty)$ тривиально:

$$\ker(D_{\infty t}^\alpha: L_\sigma^\infty(0, \infty) \rightarrow \mathcal{D}'(0, \infty)) = \{0\} \quad (3.3.15)$$

Следовательно, для каждого фиксированного $x > 0$ пространство решений уравнения

$$D_{\infty t}^\alpha u(x, \cdot) = 0$$

в классе с убыванием (3.3.10) нулевой размерности.

Доказательство. Пусть $v \in L_\sigma^\infty(0, \infty)$ и $D_{\infty t}^\alpha v = 0$. Положим $w(t) := (I_{\infty t}^{2-\alpha}v)(t)$. Тогда по определению (3.3.2) $w''(t) = 0$, следовательно,

$$w(t) = c_1 t + c_0 \quad (3.3.16)$$

с некоторыми константами $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. С другой стороны при $\beta = 2 - \alpha$ имеем

$$|w(t)| \leq \frac{\Gamma(\sigma + \alpha - 2)}{\Gamma(\sigma)} \|v\|_{\infty, \sigma} (1+t)^{2-\alpha-\sigma}.$$

Так как $\sigma > 2 - \alpha$, показатель $2 - \alpha - \sigma$ отрицателен, поэтому $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$. Из (3.3.16) следует, что единственная аффинная функция, стремящаяся к нулю на $+\infty$, есть тождественный нуль. Значит, $w(t) \equiv 0$ при $\beta = 2 - \alpha \in (0,1)$:

$$v = D_{\infty t}^{2-\alpha} I_{\infty t}^{2-\alpha} v = D_{\infty t}^{2-\alpha} w = 0 \text{ в } \mathcal{D}'(0, \infty).$$

Поскольку $v \in L_{\sigma}^{\infty}(0, \infty)$, отсюда следует, что $v = 0$ почти всюду на $(0, \infty)$. Следовательно, ядро оператора $D_{\infty t}^{\alpha}$ в классе $L_{\sigma}^{\infty}(0, \infty)$ тривиально. Теорема доказана.

Предложение 3.3.4. Пусть $\sigma > 2 - \alpha$ фиксировано. Рассмотрим вес

$$\rho(x, t) := t^{-\gamma}(t - x)^{\beta}, (x, t) \in Q. \quad (3.3.17)$$

Тогда следующие два требования эквивалентны системе неравенств

$$\beta > -1, \beta + 2 - 2\sigma < \gamma < \beta + 2. \quad (3.3.18)$$

Вес ρ локально интегрируем в окрестности вершины $(0,0)$ и диагонали $x = t$.

Для всякой функции $v \in \mathcal{A}_{\sigma}(Q)$ выполняется включение $v \in L_{\rho}^2(Q)$, где

$$L_{\rho}^2(Q) = \left\{ v: \iint_Q \rho(x, t) |v(x, t)|^2 dx dt < \infty \right\}.$$

Более того, условия (3.3.18) точны: если хотя бы одно из них нарушается, то либо сам вес ρ перестает быть локально интегрируемым в Q , либо существует функция $v \in \mathcal{A}_{\sigma}(Q)$, не принадлежащая $L_{\rho}^2(Q)$.

Доказательство. Сначала исследуем локальную интегрируемость веса. Так как

$$\int_0^t (t - x)^{\beta} dx = \frac{t^{\beta+1}}{\beta + 1}$$

интегрируемость по x вблизи диагонали $x = t$ имеет место тогда и только тогда, когда $\beta > -1$.

Далее

$$\int_0^1 \int_0^t \rho(x, t) dx dt = \frac{1}{\beta + 1} \int_0^1 t^{\beta+1-\gamma} dt$$

и этот интеграл сходится тогда и только тогда, когда

$$\beta + 1 - \gamma > -1, \text{ то есть } \gamma < \beta + 2.$$

Итак, локальная интегрируемость веса эквивалентна условиям

$$\beta > -1, \gamma < \beta + 2.$$

Теперь пусть $v \in \mathcal{A}_\sigma(Q)$. Тогда по (3.3.12)

$$|v(x, t)| \leq \|v\|_{\mathcal{A}_\sigma(Q)} (1+t)^{-\sigma}, (x, t) \in Q.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_Q \rho(x, t) |v(x, t)|^2 dx dt &\leq \|v\|_{\mathcal{A}_\sigma(Q)}^2 \int_0^\infty \int_0^t t^{-\gamma} (t-x)^\beta (1+t)^{-2\sigma} dx dt = \\ &= \frac{\|v\|_{\mathcal{A}_\sigma(Q)}^2}{\beta + 1} \int_0^\infty t^{\beta+1-\gamma} (1+t)^{-2\sigma} dt. \end{aligned}$$

Вблизи нуля этот интеграл сходится тогда и только тогда, когда

$$\beta + 1 - \gamma > -1 \Leftrightarrow \gamma < \beta + 2,$$

а на бесконечности - тогда и только тогда, когда

$$\beta + 1 - \gamma - 2\sigma < -1 \Leftrightarrow \gamma > \beta + 2 - 2\sigma.$$

Получаем (3.3.18). Докажем точность найденных условий. Если $\beta \leq -1$ то вес ρ не интегрируем в окрестности диагонали $x = t$. Если же $\beta > -1, \gamma \geq \beta + 2$ то вес ρ не интегрируем в окрестности вершины $(0,0)$.

Остаётся рассмотреть случай $\beta > -1, \gamma < \beta + 2, \gamma \leq \beta + 2 - 2\sigma$. Введём функцию $v_\#(x, t) := (1+t)^{-\sigma} (\log(e+t))^{-1/2}$. Она непрерывна в Q , и

$$\sup_{(x,t) \in Q} (1+t)^\sigma |v_\#(x, t)| = \sup_{t>0} (\log(e+t))^{-1/2} < \infty,$$

а также

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\substack{(x,t) \in Q \\ t \geq T}} (1+t)^\sigma |v_\#(x, t)| = \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{t \geq T} (\log(e+t))^{-1/2} = 0.$$

Следовательно, $v_\# \in \mathcal{A}_\sigma(Q)$. Однако

$$\begin{aligned}\iint_Q \rho(x, t) |v_{\#}(x, t)|^2 dx dt &= \int_0^{\infty} \int_0^t t^{-\gamma} (t-x)^{\beta} (1+t)^{-2\sigma} (\log(e+t))^{-1} dx dt \\ &= \frac{1}{\beta+1} \int_0^{\infty} t^{\beta+1-\gamma} (1+t)^{-2\sigma} (\log(e+t))^{-1} dt.\end{aligned}$$

Если $\gamma < \beta + 2 - 2\sigma$, то на бесконечности показатель степени при $t \geq -1$, и интеграл расходится степенным образом. Если же $\gamma = \beta + 2 - 2\sigma$, то на бесконечности получаем поведение $\frac{c}{t \log(e+t)}$, а потому интеграл расходится логарифмически. Следовательно, $v_{\#} \notin L^2_{\rho}(Q)$. Точность условий (3.3.18) доказана. Предложение доказано.

Замечание 3.3.1. Выбор веса (3.3.17) сочетает два независимых механизма: множитель $(t-x)^{\beta}$ контролирует возможное накопление массы у подвижной диагонали $x = t$, а множитель $t^{-\gamma}$ отвечает за поведение на бесконечности.

Теорема 3.3.2. Пусть

$$1 < \alpha < 2, \sigma > 2 - \alpha$$

а параметры веса β, γ удовлетворяют (3.3.18). Требуется найти функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую в области Q уравнению

$$(D_{\infty t}^{\alpha} u)(x, t) - u_{xx}(x, t) = f(x, t), (x, t) \in Q \quad (3.3.19)$$

граничным условиям Дирихле

$$u(0, t) = 0, u(t, t) = 0, t > 0, \quad (3.3.20)$$

и условию убывания на бесконечности

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ (x, t) \in Q \\ t \geq T}} \sup (1+t)^{\sigma} |u(x, t)| = 0. \quad (3.3.21)$$

Правая часть предполагается принадлежащей классу

$$f \in \mathcal{F}_{\sigma}(Q). \quad (3.3.22)$$

Задачу (3.3.19)-(3.3.22) будем обозначать через $(\mathcal{P}_{\alpha, \sigma})$.

Классические и обобщённые решения

Определение 3.3.5. Пусть $\sigma > 2 - \alpha$. Имеем $u \in C_t^{\alpha}(Q)$ если выполняются следующие условия:

1. $u \in C(Q)$;

2. для каждого фиксированного $x > 0$ функция $t \mapsto u(x, t), t > x$, принадлежит $L^\infty_\sigma(x, \infty)$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1+t)^\sigma u(x, t) = 0;$$

3. функция $I_{\infty t}^{2-\alpha} u$ определена по формуле (3.3.12) и принадлежит классу C^2 по переменной t в Q ; кроме того, для каждого фиксированного $x > 0$ и каждого $T > x$ функции

$$t \mapsto (I_{\infty t}^{2-\alpha} u)(x, t), t \mapsto \partial_t (I_{\infty t}^{2-\alpha} u)(x, t);$$

4. допускают непрерывное продолжение с интервала $(x, T]$ на $[x, T]$;
5. функция $D_{\infty t}^\alpha u$ непрерывна в Q .

Определение 3.3.6. Классическим решением задачи $(\mathcal{P}_{\alpha, \sigma})$ называется функция

$$u \in C_x^2(Q) \cap C_t^\alpha(Q) \cap \mathcal{A}_\sigma(Q),$$

удовлетворяющая (3.3.19)-(3.3.22) поточечно.

Определение 3.3.7. Через \mathcal{T} обозначим множество функций $\varphi \in C^\infty(\bar{Q})$, для которых выполняются условия

$$\varphi|_{\Sigma_0} = 0, \varphi|_{\Sigma_1} = 0, \partial_t \varphi|_{\Sigma_1} = 0 \quad (3.3.23)$$

и существует число $T_\varphi > 0$ такое, что

$$\varphi(x, t) = 0 \text{ при всех } (x, t) \in Q \text{ с } t \geq T_\varphi. \quad (3.3.24)$$

Для $\varphi \in \mathcal{T}$ определим левостороннюю производную Герасимова-Капуто по переменной t на срезе $t > x$:

$$({}^c D_{xt}^\alpha \varphi)(x, t) := \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_x^t \frac{\partial_{\tau\tau} \varphi(x, \tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau, (x, t) \in Q \quad (3.3.25)$$

Замечание 3.3.2. Условие $\partial_t \varphi|_{\Sigma_1} = 0$ в (3.3.23) возникает из-за того, что при фиксированном x переменная t пробегает полуось (x, ∞) , и при двукратном интегрировании по частям по t появляется граничный член в точке $t = x$. Именно это отличает подвижную диагональ Σ_1 от стандартного цилиндрического случая.

Определение 3.3.8. Пусть вес ρ задан формулой (3.3.17), причём выполнены условия (3.3.18). Определим пространство

$$W_{2,\rho}^{1,0}(Q) := \{u \in L^2_\rho(Q) : u_x \in L^2_\rho(Q), u|_{\Sigma_0} = u|_{\Sigma_1} = 0\} \quad (3.3.26)$$

с нормой

$$\|u\|_{W_{2,\rho}^{1,0}(Q)}^2 := \iint_Q \rho(x,t)(|u(x,t)|^2 + |u_x(x,t)|^2) dxdt. \quad (3.3.27)$$

Определение 3.3.9. Обобщённым решением задачи $(\mathcal{P}_{\alpha,\sigma})$ называется функция $u \in W_{2,\rho}^{1,0}(Q) \cap \mathcal{A}_\sigma(Q)$, для которой дополнительно выполнено условие $u_x \in L^2_{\text{loc}}(Q)$ и при всех $\varphi \in \mathcal{T}$ имеет место интегральное тождество

$$\begin{aligned} \iint_Q (u_x(x,t)\varphi_x(x,t) + u(x,t)({}^c D_{xt}^\alpha \varphi)(x,t)) dxdt &= \\ &= \iint_Q f(x,t)\varphi(x,t) dxdt. \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Предложение 3.3.5. Пусть u - классическое решение задачи $(\mathcal{P}_{\alpha,\sigma})$ и, кроме того, $u \in W_{2,\rho}^{1,0}(Q)$. Тогда u является обобщённым решением. Иными словами, согласовано с классическим решением при повышенной гладкости.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{T}$. Так как φ обращается в нуль при $t \geq T_\varphi$, интеграл по Q можно записать в виде

$$\iint_Q (D_{\infty t}^\alpha u)\varphi dxdt = \int_0^{T_\varphi} \int_0^t (D_{\infty t}^\alpha u)(x,t)\varphi(x,t) dxdt.$$

Переставим порядок интегрирования:

$$\int_0^{T_\varphi} \int_0^t (D_{\infty t}^\alpha u)(x,t)\varphi(x,t) dxdt = \int_0^{T_\varphi} \int_x^{T_\varphi} (D_{\infty t}^\alpha u)(x,t)\varphi(x,t) dt dx.$$

Для фиксированного $x \in (0, T_\varphi)$ обозначим $w_x(t) := (I_{\infty t}^{2-\alpha} u)(x,t)$, $t > x$. Тогда

$$(D_{\infty t}^\alpha u)(x,t) = \partial_{tt} w_x(t).$$

Известно, что функция w_x принадлежит $C^2(x, T_\varphi]$, а функции w_x и w'_x допускают непрерывное продолжение на отрезок $[x, T_\varphi]$.

Зафиксируем $\varepsilon \in (0, T_\varphi - x)$. Тогда двукратное интегрирование по частям на отрезке $[x + \varepsilon, T_\varphi]$ даёт

$$\int_{x+\varepsilon}^{T_\varphi} w_x''(t)\varphi(x,t)dt = [w_x'(t)\varphi(x,t) - w_x(t)\partial_t\varphi(x,t)]_{t=x+\varepsilon}^{t=T_\varphi} + \int_{x+\varepsilon}^{T_\varphi} w_x(t)\partial_{tt}\varphi(x,t)dt.$$

Так как $\varphi(x,t) \equiv 0$ при $t \geq T_\varphi$, имеем $\varphi(x, T_\varphi) = 0$, $\partial_t\varphi(x, T_\varphi) = 0$.

Далее, из условий (3.3.23) следует $\varphi(x, x) = 0$, $\partial_t\varphi(x, x) = 0$. Поэтому, поскольку φ гладка на \bar{Q} , существует константа $C_\varphi > 0$ такая, что

$$|\varphi(x, x + \varepsilon)| \leq C_\varphi \varepsilon^2, \quad |\partial_t\varphi(x, x + \varepsilon)| \leq C_\varphi \varepsilon.$$

Так как w_x и w_x' непрерывны на $[x, T_\varphi]$, они ограничены на этом отрезке. Следовательно,

$$[w_x'(t)\varphi(x,t) - w_x(t)\partial_t\varphi(x,t)]_{t=x+\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, получаем

$$\int_x^{T_\varphi} (D_{\infty t}^\alpha u)(x,t)\varphi(x,t)dt = \int_x^{T_\varphi} w_x(t)\partial_{tt}\varphi(x,t)dt.$$

Подставляя определение w_x , имеем

$$\int_x^{T_\varphi} w_x(t)\partial_{tt}\varphi(x,t)dt = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_x^{T_\varphi} \left(\int_t^\infty \frac{u(x,\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-1}} d\tau \right) \partial_{tt}\varphi(x,t)dt.$$

Проверим абсолютную сходимость, необходимую для перестановки порядка интегрирования. Из (3.3.9) следует

$$|u(x,\tau)| \leq \|u\|_{\mathcal{A}_\sigma(Q)} (1+\tau)^{-\sigma}, \quad \sigma > 2-\alpha.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_x^{T_\varphi} \int_t^\infty \frac{|u(x,\tau)| |\partial_{tt}\varphi(x,t)|}{(\tau-t)^{\alpha-1}} d\tau dt \\ & \leq \|\partial_{tt}\varphi\|_{L^\infty(\bar{Q})} \|u\|_{\mathcal{A}_\sigma(Q)} \int_x^{T_\varphi} \int_t^\infty \frac{(1+\tau)^{-\sigma}}{(\tau-t)^{\alpha-1}} d\tau dt. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл конечен, поскольку $\sigma > 2-\alpha$, а внешний интеграл берётся по конечному отрезку $[x, T_\varphi]$. Значит,

$$\int_x^{T_\varphi} (D_{\infty t}^\alpha u)(x, t) \varphi(x, t) dt = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \int_x^\infty u(x, \tau) \left(\int_x^{\min\{\tau, T_\varphi\}} \frac{\partial_{tt} \varphi(x, t)}{(\tau - t)^{\alpha-1}} dt \right) d\tau$$

Поскольку $\varphi(x, t) \equiv 0$ при $t \geq T_\varphi$, имеем также $\partial_{tt} \varphi(x, t) = 0$ при $t \geq T_\varphi$. Поэтому для каждого $\tau > x$

$$\frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \int_x^{\min\{\tau, T_\varphi\}} \frac{\partial_{tt} \varphi(x, t)}{(\tau - t)^{\alpha-1}} dt = ({}^C D_{xt}^\alpha \varphi)(x, \tau)$$

и, следовательно,

$$\int_x^{T_\varphi} (D_{\infty t}^\alpha u)(x, t) \varphi(x, t) dt = \int_x^\infty u(x, \tau) ({}^C D_{xt}^\alpha \varphi)(x, \tau) d\tau.$$

Интегрируя по x , получаем

$$\iint_Q (D_{\infty t}^\alpha u) \varphi dx dt = \iint_Q u ({}^C D_{xt}^\alpha \varphi) dx dt. \quad (3.3.29)$$

Рассмотрим теперь пространственную часть. Так как $u \in C_x^2(Q)$, $\varphi \in \mathcal{T}$ и $\varphi|_{\Sigma_0 \cup \Sigma_1} = 0$, для каждого фиксированного t имеем

$$-\int_0^t u_{xx}(x, t) \varphi(x, t) dx = \int_0^t u_x(x, t) \varphi_x(x, t) dx.$$

Интегрируя по t , получаем

$$-\iint_Q u_{xx} \varphi dx dt = \iint_Q u_x \varphi_x dx dt. \quad (3.3.30)$$

Наконец, умножая уравнение (3.3.19) на φ , интегрируя по Q и используя (3.3.29), (3.3.30), получаем

$$\iint_Q (u_x \varphi_x + u {}^C D_{xt}^\alpha \varphi) dx dt = \iint_Q f \varphi dx dt.$$

Это и есть (3.3.29). Предложение доказано.

Лемма 3.3.1. Пусть $1 < \alpha < 2$. Предположим, что функция $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что

$$w(t) := (I_{\infty t}^{2-\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_t^{\infty} \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-1}} d\tau \quad (3.3.31)$$

определена для всех $t > 0$, принадлежит классу $C^2(0, \infty) \cap C^1([0, \infty))$ и удовлетворяет

$$D_{\infty t}^{\alpha} f = w'' \in L^1(0, \infty). \quad (3.3.32)$$

Пусть далее $g \in C^2([0, \infty))$ и выполнены условия

$$w'(0)g(0) - w(0)g'(0) = 0, \lim_{R \rightarrow \infty} (w'(R)g(R) - w(R)g'(R)) = 0 \quad (3.3.33)$$

$$\int_0^{\infty} \int_t^{\infty} \frac{|f(\tau)||g''(t)|}{(\tau-t)^{\alpha-1}} d\tau dt < \infty. \quad (3.3.34)$$

Тогда справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_0^{\infty} (D_{\infty t}^{\alpha} f)(t)g(t)dt = \int_0^{\infty} f(t)({}^C D_{0t}^{\alpha} g)(t)dt. \quad (3.3.35)$$

Доказательство. Зафиксируем $R > 0$. Из (3.3.2) и (3.3.31) следует

$$(D_{\infty t}^{\alpha} f)(t) = w''(t).$$

Поэтому на отрезке $[0, R]$ двукратное интегрирование по частям даёт

$$\int_0^R (D_{\infty t}^{\alpha} f)(t)g(t)dt = [w'(t)g(t) - w(t)g'(t)]_{t=0}^{t=R} + \int_0^R w(t)g''(t)dt. \quad (3.3.36)$$

Переходя в (3.3.36) к пределу при $R \rightarrow \infty$ и используя (3.3.33), получаем

$$\int_0^{\infty} (D_{\infty t}^{\alpha} f)(t)g(t)dt = \int_0^{\infty} w(t)g''(t)dt. \quad (3.3.37)$$

Подставим теперь (3.3.31) в правую часть (3.3.37):

$$\int_0^{\infty} w(t)g''(t)dt = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{\infty} \left(\int_t^{\infty} \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-1}} d\tau \right) g''(t)dt.$$

Условие (3.3.34) позволяет применить теорему Фубини:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty w(t)g''(t)dt &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^\infty f(\tau) \left(\int_0^\tau \frac{g''(t)}{(\tau-t)^{\alpha-1}} dt \right) d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau) ({}^C D_{0t}^\alpha g)(\tau) d\tau.\end{aligned}\quad (3.3.38)$$

Подставляя (3.3.38) в (3.3.37), получаем (3.3.35). Лемма доказана.

Замечание 3.3.3. Для дальнейших применений операторов достаточно следующего набора условий.

Пусть $f \in L_\sigma^\infty(0, \infty)$, $\sigma > 2 - \alpha$ и функция $w = I_{\infty t}^{2-\alpha}$ принадлежит классу $C^2(0, \infty) \cap C^1([0, \infty))$. Если далее $g \in C^2([0, \infty))$, $g(0) = g'(0) = 0$, $\text{supp } g \Subset [0, \infty)$, то условия (3.3.33) и (3.3.34) выполнены. Действительно, компактность носителя g влечёт существование числа $T_g > 0$ такого, что $g(t) = g'(t) = 0$ при $t \geq T_g$, а потому

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (w'(R)g(R) - w(R)g'(R)) = 0.$$

Левый граничный член исчезает вследствие равенств $g(0) = g'(0) = 0$. Кроме того, g'' также имеет компактный носитель, и потому

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_t^\infty \frac{|f(\tau)||g''(t)|}{(\tau-t)^{\alpha-1}} d\tau dt &\leq \|g''\|_{L^\infty(0, \infty)} \int_0^{T_g} \left(\int_t^\infty \frac{|f(\tau)|}{(\tau-t)^{\alpha-1}} d\tau \right) dt \\ &= \Gamma(2-\alpha) \|g''\|_{L^\infty(0, \infty)} \int_0^{T_g} (I_{\infty t}^{2-\alpha} |f|)(t) dt.\end{aligned}$$

Следовательно, условие (3.3.34) также выполнено.

Следствие 3.3.1. Пусть $a \geq 0$, $1 < \alpha < 2$. Предположим, что функция $f \in C^2(a, \infty)$ такая, что $w = I_{\infty t}^{2-\alpha} f$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы на полуоси (a, ∞) , а $g \in C^2([a, \infty))$ удовлетворяет условиям

$$g(a) = 0, g'(a) = 0, \quad (3.3.39)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (w'(R)g(R) - w(R)g'(R)) = 0, \quad (3.3.40)$$

$$\int_a^\infty \int_t^\infty \frac{|f(\tau)||g''(t)|}{(\tau-t)^{\alpha-1}} d\tau dt < \infty. \quad (3.3.41)$$

Тогда

$$\int_a^\infty (D_{\infty t}^\alpha f)(t)g(t)dt = \int_a^\infty f(t)({}^C D_{at}^\alpha g)(t)dt \quad (3.3.42)$$

где

$$({}^c D_{at}^\alpha g)(t) := \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^t \frac{g''(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau, t > a \quad (3.3.43)$$

Доказательство. Введём сдвинутые функции $\tilde{f}(s) := f(a+s)$, $\tilde{g}(s) := g(a+s)$, $s > 0$. Тогда

$$(D_{\infty t}^\alpha \tilde{f})(s) = (D_{\infty t}^\alpha f)(a+s), ({}^c D_{0t}^\alpha \tilde{g})(s) = ({}^c D_{at}^\alpha g)(a+s).$$

Условия (3.3.39)-(3.3.41) переходят в условия предыдущей леммы для пары (\tilde{f}, \tilde{g}) на $(0, \infty)$. Применяя (3.3.35) к этой паре и возвращаясь к переменной $t = a+s$, получаем (3.3.42). Следствие доказано.

Предложение 3.3.6. Пусть $1 < \alpha < 2$, $a \in \mathbb{R}$, $\beta > \alpha - 1$. Тогда функция $f(t) = (t-a)^\beta$ не принадлежит области определения оператора $D_{\infty t}^\alpha$ на луче (a, ∞) : для каждого $t > a$ интеграл

$$\int_t^\infty \frac{(\tau-a)^\beta}{(\tau-t)^{\alpha-1}} d\tau \quad (3.3.44)$$

расходится.

Доказательство. Подстановкой $\tau = t+s$, $s > 0$, получаем

$$\int_t^\infty \frac{(\tau-a)^\beta}{(\tau-t)^{\alpha-1}} d\tau = \int_0^\infty (t-a+s)^\beta s^{1-\alpha} ds.$$

Для всех $s \geq 1+t-a$ выполнено $t-a+s \geq s$, откуда $(t-a+s)^\beta s^{1-\alpha} \geq s^{\beta+1-\alpha}$. Так как $\beta > \alpha - 1$, имеем $\beta + 1 - \alpha > 0$, и потому

$$\int_{1+t-a}^\infty s^{\beta+1-\alpha} ds = +\infty.$$

Следовательно, расходится и исходный интеграл (3.3.44). Предложение доказано.

Лемма 3.3.2. Пусть $1 < \alpha < 2$, $a > 0$ и $\beta > \alpha - 1$. Определим

$$\psi_{a,\beta}(t) := (a-t)_+^\beta = \begin{cases} (a-t)^\beta, & 0 < t < a \\ 0, & t \geq a \end{cases}. \quad (3.3.45)$$

Тогда для всех $0 < t < a$ справедлива формула

$$(D_{\infty t}^\alpha \psi_{a,\beta})(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (a-t)^{\beta-\alpha} \quad (3.3.46)$$

а для $t > a$ имеем $(D_{\infty t}^{\alpha} \psi_{a,\beta})(t) = 0$.

Лемма 3.3.3. Пусть $1 < \alpha < 2$ и $p > 0$. Тогда функция e^{-pt} является собственной функцией правостороннего оператора:

$$(D_{\infty t}^{\alpha} e^{-pt})(t) = p^{\alpha} e^{-pt}, t > 0. \quad (3.3.47)$$

Следовательно, для преобразования Лапласа

$$\mathcal{L}[h](s) := \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt, \Re s > 0$$

имеем

$$\mathcal{L}[D_{\infty t}^{\alpha} e^{-pt}](s) = \frac{p^{\alpha}}{s + p}, \Re s > 0. \quad (3.3.48)$$

Весовые пространства и компактность

Уточняем ранее введённый класс следующим образом:

$$\beta_* := 0, \gamma_* := 2 - \sigma. \quad (3.3.49)$$

Так как $\sigma > 2 - \alpha > 0$, имеем $-1 < \beta_* = 0, \beta_* + 2 - 2\sigma = 2 - 2\sigma < 2 - \sigma = \gamma_* < 2 = \beta_* + 2$, то есть условия (3.3.18) выполнены. Следовательно, далее фиксируем

$$\rho(x, t) := t^{\sigma-2}, \quad (x, t) \in Q. \quad (3.3.50)$$

Определение 3.3.10. Используя вес (3.3.50), понимаем пространства (3.3.26)-(3.3.27) как

$$L_{\rho}^2(Q) := \left\{ u : \left\| u \right\|_{L_{\rho}^2(Q)}^2 := \iint_Q \rho(x, t) |u(x, t)|^2 dx dt < \infty \right\}, \quad (3.3.51)$$

$$W_{2,\rho}^{1,0}(Q) := \{ u \in L_{\rho}^2(Q) : u_x \in L_{\rho}^2(Q), u|_{\Sigma_0} = u|_{\Sigma_1} = 0 \}, \quad (3.3.52)$$

$$\|u\|_{W_{2,\rho}^{1,0}(Q)}^2 := \iint_Q \rho(x, t) (|u(x, t)|^2 + |u_x(x, t)|^2) dx dt. \quad (3.3.53)$$

Введём также пространство

$$V_{\sigma}(Q) := W_{2,\rho}^{1,0}(Q) \cap \mathcal{A}_{\sigma}(Q), \quad (3.3.54)$$

$$\|u\|_{V_{\sigma}(Q)} := \|u\|_{W_{2,\rho}^{1,0}(Q)} + \|u\|_{\mathcal{A}_{\sigma}(Q)}. \quad (3.3.55)$$

Предложение 3.3.7. Для каждого $u \in \mathcal{A}_{\sigma}(Q)$ справедлива оценка

$$\|u\|_{L^2_\rho(Q)}^2 \leq B(\sigma, \sigma) \|u\|_{\mathcal{A}_\sigma(Q)}^2 = \frac{\Gamma(\sigma)^2}{\Gamma(2\sigma)} \|u\|_{\mathcal{A}_\sigma(Q)}^2. \quad (3.3.56)$$

В частности, вложение $\mathcal{A}_\sigma(Q) \hookrightarrow L^2_\rho(Q)$ непрерывно.

Доказательство. Из (3.3.9) следует

$$|u(x, t)| \leq \|u\|_{\mathcal{A}_\sigma(Q)} (1+t)^{-\sigma}, \quad (x, t) \in Q.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2_\rho(Q)}^2 &= \iint_Q t^{\sigma-2} |u(x, t)|^2 dx dt \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{A}_\sigma(Q)}^2 \int_0^\infty \int_0^t t^{\sigma-2} (1+t)^{-2\sigma} dx dt \\ &= \|u\|_{\mathcal{A}_\sigma(Q)}^2 \int_0^\infty t^{\sigma-1} (1+t)^{-2\sigma} dt. \end{aligned}$$

Последний интеграл равен

$$B(\sigma, \sigma) = \int_0^\infty t^{\sigma-1} (1+t)^{-2\sigma} dt = \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(\sigma)}{\Gamma(2\sigma)}.$$

Это и даёт (3.3.56). Предложение доказано.

Лемма 3.3.4. Пусть $t > 0$ и $v \in H_0^1(0, t)$. Тогда справедливо неравенство Пуанкаре

$$\int_0^t |v(x)|^2 dx \leq \frac{t^2}{\pi^2} \int_0^t |v'(x)|^2 dx. \quad (3.3.57)$$

Предложение 3.3.8.

$$V_\sigma(Q) \hookrightarrow L^2_\rho(Q) \quad (3.3.58)$$

не является компактным.

Доказательство. Выберем не нулевую функцию $\chi \in C_c^\infty(1, 2)$ и определим

$$u_n(x, t) := \chi(t) \sin\left(\frac{\pi x}{t}\right) \sin(nt), \quad (x, t) \in Q, n \in \mathbb{N}. \quad (3.3.59)$$

Так как

$$\sin\left(\frac{\pi \cdot 0}{t}\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi t}{t}\right) = \sin(\pi) = 0$$

каждая функция u_n обращается в нуль на Σ_0 и Σ_1 . Поскольку носитель χ содержится в $[1,2]$, имеем

$$\|u_n\|_{\mathcal{A}_\sigma(Q)} \leq 3^\sigma \|\chi\|_{L^\infty(1,2)}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^2_\rho(Q)}^2 &= \int_1^2 t^{\sigma-2} \chi(t)^2 \sin^2(nt) \left(\int_0^t \sin^2\left(\frac{\pi x}{t}\right) dx \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 t^{\sigma-1} \chi(t)^2 \sin^2(nt) dt \end{aligned} \quad (3.3.60)$$

а

$$\begin{aligned} \|(u_n)_x\|_{L^2_\rho(Q)}^2 &= \int_1^2 t^{\sigma-2} \chi(t)^2 \sin^2(nt) \left(\int_0^t \frac{\pi^2}{t^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{t}\right) dx \right) dt \\ &= \frac{\pi^2}{2} \int_1^2 t^{\sigma-3} \chi(t)^2 \sin^2(nt) dt. \end{aligned} \quad (3.3.61)$$

Из (3.3.60)-(3.3.61) следует, что последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $V_\sigma(Q)$. Покажем, что она не имеет сходящейся в $L^2_\rho(Q)$ подпоследовательности. Обозначим $a(t) := \frac{1}{2} t^{\sigma-1} \chi(t)^2 \in C_c^\infty(1,2)$, $a \not\equiv 0$. Тогда

$$\langle u_n, u_m \rangle_{L^2_\rho(Q)} = \int_1^2 a(t) \sin(nt) \sin(mt) dt. \quad (3.3.62)$$

По лемме Римана-Лебега, для каждого фиксированного m при $n \rightarrow \infty$ правая часть (3.3.62) стремится к нулю. Кроме того,

$$\|u_n\|_{L^2_\rho(Q)}^2 = \int_1^2 a(t) \sin^2(nt) dt = \frac{1}{2} \int_1^2 a(t) dt - \frac{1}{2} \int_1^2 a(t) \cos(2nt) dt$$

и потому, повторно по лемме Римана-Лебега,

$$\|u_n\|_{L^2_\rho(Q)}^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int_1^2 a(t) dt = \frac{1}{4} \int_1^2 t^{\sigma-1} \chi(t)^2 dt =: c_\chi > 0. \quad (3.3.63)$$

Выберем подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ так, чтобы

$$\|u_{n_k}\|_{L^2_\rho(Q)}^2 \geq \frac{c_\chi}{2} \text{ для всех } k$$

и

$$\left| \left\langle u_{n_k}, u_{n_j} \right\rangle_{L^2_\rho(Q)} \right| \leq \frac{c_\chi}{8} \text{ при } k \neq j.$$

Тогда для $k \neq j$

$$\begin{aligned} \|u_{n_k} - u_{n_j}\|_{L^2_\rho(Q)}^2 &= \|u_{n_k}\|_{L^2_\rho(Q)}^2 + \|u_{n_j}\|_{L^2_\rho(Q)}^2 - 2 \left\langle u_{n_k}, u_{n_j} \right\rangle_{L^2_\rho(Q)} \\ &\geq \frac{c_\chi}{2} + \frac{c_\chi}{2} - 2 \cdot \frac{c_\chi}{8} = \frac{3c_\chi}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно, подпоследовательность не может быть фундаментальной в $L^2_\rho(Q)$, а значит, вложение (3.3.58) некомпактно.

Замечание 3.3.4. Предыдущее предложение показывает, что ранее введённое пространство $V_\sigma(Q)$ достаточно для записи слабой формулировки, но недостаточно для компактного шага: отсутствие контроля по переменной t допускает быстрые осцилляции.

Определение 3.3.11. Положим

$$\mathcal{H}_\sigma(Q) := \{u \in V_\sigma(Q) : u_t \in L^2_\rho(Q)\}, \quad (3.3.64)$$

$$\|u\|_{\mathcal{H}_\sigma(Q)} := \|u\|_{V_\sigma(Q)} + \|u_t\|_{L^2_\rho(Q)}. \quad (3.3.65)$$

Теорема 3.3.3. Вложение

$$\mathcal{H}_\sigma(Q) \hookrightarrow L^2_\rho(Q) \quad (3.3.66)$$

компактно.

Доказательство. Пусть $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ - последовательность, ограниченная в $\mathcal{H}_\sigma(Q)$:

$$\|u_n\|_{\mathcal{H}_\sigma(Q)} \leq M, n \in \mathbb{N}. \quad (3.3.67)$$

Требуется доказать существование подпоследовательности, сходящейся в $L^2_\rho(Q)$. Для каждого целого $j \geq 2$ положим

$$Q_j := Q_{1/j, j} = \{(x, t) \in Q : 1/j < t < j\}.$$

Тогда области Q_j ограничены, липшицевы,

$$Q_j \subset Q_{j+1}, \bigcup_{j=2}^{\infty} Q_j = Q.$$

Так как вес $\rho(x, t) = t^{\sigma-2}$ непрерывен и положителен на каждом $\overline{Q_j}$, существуют числа $0 < m_j \leq M_j < \infty$ такие, что $m_j \leq \rho(x, t) \leq M_j, (x, t) \in Q_j$. Из (3.3.67), (3.3.53) и (3.3.65) следует

$$\int_{Q_j} (|u_n|^2 + |(u_n)_x|^2 + |(u_n)_t|^2) dxdt \leq C_j M^2, n \in \mathbb{N},$$

где $C_j > 0$ зависит только от j и σ . Следовательно, последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $H^1(Q_j)$ для каждого фиксированного j .

По теореме Реллиха-Кондрашова из ограниченности в $H^1(Q_j)$ следует относительная компактность в $L^2(Q_j)$. Так как на Q_j вес ρ эквивалентен постоянному весу, то вложение $H^1(Q_j) \hookrightarrow L^2_\rho(Q_j)$ также компактно.

Поэтому можно провести диагональное выделение подпоследовательностей. Сначала выберем подпоследовательность $\{u_n^{(2)}\}$, сходящуюся в $L^2_\rho(Q_2)$. Затем из неё выделим подпоследовательность $\{u_n^{(3)}\}$, сходящуюся в $L^2_\rho(Q_3)$, и так далее. Рассмотрим диагональную подпоследовательность $v_k := u_n^{(k)}, k \geq 2$. Тогда для каждого фиксированного $j \geq 2$ последовательность $\{v_k\}_{k \geq j}$ сходится в $L^2_\rho(Q_j)$.

Из (3.3.67) и (3.3.9) имеем $|v_k(x, t)| \leq M(1+t)^{-\sigma}, (x, t) \in Q, k \geq 2$. Поэтому для области $E_j^0 := \{(x, t) \in Q: 0 < t < 1/j\}$ имеем

$$\begin{aligned} \|v_k\|_{L^2_\rho(E_j^0)}^2 &= \iint_{E_j^0} t^{\sigma-2} |v_k(x, t)|^2 dxdt \\ &\leq M^2 \int_0^{1/j} \int_0^t t^{\sigma-2} dxdt = \frac{M^2}{\sigma} j^{-\sigma}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\sup_{k \geq 2} \|v_k\|_{L^2_\rho(E_j^0)} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Аналогично, для области $E_j^\infty := \{(x, t) \in Q: t > j\}$ получаем

$$\begin{aligned} \|v_k\|_{L^2_\rho(E_j^\infty)}^2 &= \iint_{E_j^\infty} t^{\sigma-2} |v_k(x, t)|^2 dxdt \\ &\leq M^2 \int_j^\infty \int_0^t t^{\sigma-2} (1+t)^{-2\sigma} dxdt \end{aligned}$$

$$= M^2 \int_j^\infty t^{\sigma-1} (1+t)^{-2\sigma} dt.$$

Так как подынтегральная функция суммируема на $(1, \infty)$, имеем $\sup_{k \geq 2} \|v_k\|_{L_\rho^2(E_j^\infty)} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $J \geq 2$ настолько большим, чтобы одновременно выполнялись оценки

$$\sup_{k \geq 2} \|v_k\|_{L_\rho^2(E_j^0)} < \frac{\varepsilon}{8}, \quad \sup_{k \geq 2} \|v_k\|_{L_\rho^2(E_j^\infty)} < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Тогда $Q \setminus Q_J = E_j^0 \cup E_j^\infty$ и, следовательно, для любых $k, \ell \geq 2$

$$\|v_k - v_\ell\|_{L_\rho^2(Q \setminus Q_J)} \leq \|v_k\|_{L_\rho^2(E_j^0)} + \|v_\ell\|_{L_\rho^2(E_j^0)} + \|v_k\|_{L_\rho^2(E_j^\infty)} + \|v_\ell\|_{L_\rho^2(E_j^\infty)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, по построению диагональной подпоследовательности $\{v_k\}$ она сходится в $L_\rho^2(Q_J)$. Следовательно, существует номер $K = K(\varepsilon, J)$ такой, что при $k, \ell \geq K$:

$$\|v_k - v_\ell\|_{L_\rho^2(Q_J)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для всех $k, \ell \geq K$:

$$\|v_k - v_\ell\|_{L_\rho^2(Q)} \leq \|v_k - v_\ell\|_{L_\rho^2(Q_J)} + \|v_k - v_\ell\|_{L_\rho^2(Q \setminus Q_J)} < \varepsilon.$$

Значит, последовательность $\{v_k\}$ фундаментальна в $L_\rho^2(Q)$. Так как пространство $L_\rho^2(Q)$ полно, существует функция $u_* \in L_\rho^2(Q)$ такая, что $v_k \rightarrow u_*$ в $L_\rho^2(Q)$.

Итак, из всякой ограниченной последовательности в $\mathcal{H}_\sigma(Q)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $L_\rho^2(Q)$. Теорема доказана.

Модельная однородная задача

Определение 3.3.12. Пусть $0 < \mu < 1$ и функция $\phi(x, \cdot)$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[x, T]$, $T > x$. Определим сдвинутую левостороннюю производную Герасимова-Капуто порядка μ по переменной t формулой

$$({}^c D_{xt}^\mu \phi)(x, t) := \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_x^t \frac{\partial_\tau \phi(x, \tau)}{(t-\tau)^\mu} d\tau, \quad (x, t) \in Q. \quad (3.3.68)$$

При $\mu = \alpha - 1 \in (0, 1)$ это даёт

$$({}^c D_{xt}^{\alpha-1} \phi)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_x^t \frac{\partial_\tau \phi(x, \tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau. \quad (3.3.69)$$

Определение 3.3.13. Для модельной энергетической оценки введём вспомогательный класс

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_\sigma(Q): u \in C_x^2(Q) \cap C_t^\alpha(Q) \cap \mathcal{H}_\sigma(Q): \\ \text{для каждого } x > 0 \text{ функция } t \mapsto u(x, t) \text{ принадлежит } W_{\text{loc}}^{1,1}([x, \infty)), \\ v_x(s) := u(x, x + s), s > 0, \text{ принадлежит } H_0^1(0, \infty) \cap L^1(0, \infty), \\ {}^c D_{0s}^{\alpha-1} v_x \in L^1(0, \infty) \cap L^2(0, \infty), \\ u_t(x, \cdot) \in L^1(x, \infty), D_{\infty t}^\alpha u(x, \cdot) \in L^1(x, \infty), \\ \int_x^\infty \int_t^\infty \frac{|u(x, \tau)| |u_t(x, t)|}{(\tau - t)^{\alpha-1}} d\tau dt < \infty, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \partial_t (I_{\infty t}^{2-\alpha} u)(x, t) = 0, \\ x \mapsto \int_x^\infty |u(x, \tau)| d\tau \in L^2(0, \infty), \\ x \mapsto \int_x^\infty |D_{\infty t}^\alpha u(x, \tau)| d\tau \in L^2(0, \infty), \\ x \mapsto \int_x^\infty |u_x(x, \tau)| d\tau \in L^2(0, \infty). \end{array} \right. \quad (3.3.70)$$

Лемма 3.3.5. Пусть $0 < \mu < 2, n - 1 < \mu < n, n \in \{1, 2\}$, и пусть v - вещественнозначная функция, удовлетворяющая условиям

$$v \in H^n(0, \infty) \cap L^1(0, \infty) \cap L^2(0, \infty), v^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (3.3.71)$$

$${}^c D_{0t}^\mu v \in L^1(0, \infty) \cap L^2(0, \infty). \quad (3.3.72)$$

Тогда справедлива формула

$$\int_0^\infty v(t) ({}^c D_{0t}^\mu v)(t) dt = \frac{\cos\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)}{\pi} \int_0^\infty \omega^\mu |\mathcal{L}[v](i\omega)|^2 d\omega. \quad (3.3.73)$$

В частности,

$$\int_0^\infty v(t) ({}^c D_{0t}^\mu v)(t) dt \begin{cases} \geq 0, & 0 < \mu < 1 \\ \leq 0, & 1 < \mu < 2. \end{cases} \quad (3.3.74)$$

Теорема 3.3.4. Пусть $1 < \alpha < 2$. Если функция $u \in \mathcal{E}_\sigma(Q)$ удовлетворяет однородной задаче

$$(D_{\infty t}^{\alpha} u)(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, (x, t) \in Q \quad (3.3.75)$$

$$u(0, t) = 0, u(t, t) = 0, t > 0 \quad (3.3.76)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\substack{(x, t) \in Q \\ t \geq T}} (1 + t)^{\sigma} |u(x, t)| = 0 \quad (3.3.77)$$

то

$$u \equiv 0 \text{ в } Q. \quad (3.3.78)$$

Функция Грина в вспомогательной полуплоскости

Рассмотрим вспомогательную полуплоскость

$$\mathbb{H} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2: x > 0, t > 0\}, \quad (3.3.79)$$

и продолжим правую часть нулём вне Q :

$$\tilde{f}(x, t) := \begin{cases} f(x, t), & 0 < x < t, t > 0 \\ 0, & x \geq t, t > 0. \end{cases} \quad (3.3.80)$$

Определение 3.3.14. Для $\lambda > 0$ положим

$$\Gamma_{\lambda}(s) := s^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda s^{\alpha}), s > 0. \quad (3.3.81)$$

Здесь

Лемма 3.3.6. Для каждого $\lambda > 0$ функция (3.3.81) удовлетворяет соотношениям

$$\int_0^{\infty} e^{-ps} \Gamma_{\lambda}(s) ds = \frac{1}{p^{\alpha} + \lambda}, \Re p > 0 \quad (3.3.82)$$

$$D_{0s}^{\alpha} \Gamma_{\lambda} + \lambda \Gamma_{\lambda} = \delta_0 \text{ в } \mathcal{D}'(0, \infty). \quad (3.3.83)$$

Следовательно, для

$$\Gamma_{\lambda, \tau}(t) := \Gamma_{\lambda}(\tau - t) \mathbf{1}_{\{\tau > t\}}. \quad (3.3.84)$$

Имеем

$$(D_{\infty t}^{\alpha} \Gamma_{\lambda, \tau})(t) + \lambda \Gamma_{\lambda, \tau}(t) = \delta(t - \tau) \text{ в } \mathcal{D}'(0, \infty). \quad (3.3.85)$$

Теорема 3.3.5. Для $x > 0, \xi > 0, \tau > t > 0$ положим

$$G_0(x, \xi, t, \tau) := \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(kx) \sin(k\xi) \Gamma_{k^2}(\tau - t) dk. \quad (3.3.86)$$

Тогда выполняются следующие утверждения.

1. Интеграл в (3.3.86) сходится абсолютно для всех $x, \xi > 0, \tau > t > 0$.
2. Функция G_0 является функцией Грина задачи

$$(D_{\infty t}^\alpha w)(x, t) - w_{xx}(x, t) = \tilde{f}(x, t), (x, t) \in \mathbb{H}, w(0, t) = 0 \quad (3.3.87)$$

в том смысле, что для всякой $\tilde{f} \in C_c^\infty(\mathbb{H})$ функция

$$w(x, t) = \int_t^\infty \int_0^\infty G_0(x, \xi, t, \tau) \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (3.3.88)$$

удовлетворяет (3.3.87) в классическом смысле.

3. Пространственная симметрия имеет вид

$$G_0(x, \xi, t, \tau) = G_0(\xi, x, t, \tau). \quad (3.3.89)$$

4. Преобразование Лапласа по переменной $s = \tau - t$ равно

$$\begin{aligned} \hat{G}_0(x, \xi, p) &:= \int_0^\infty e^{-ps} G_0(x, \xi, 0, s) ds \\ &= \frac{1}{2p^{\frac{\alpha}{2}}} \left(e^{-p^{\frac{\alpha}{2}}|x-\xi|} - e^{-p^{\frac{\alpha}{2}}(x+\xi)} \right), \Re p > 0. \end{aligned} \quad (3.3.90)$$

Предложение 3.3.9. Функция (3.3.86) допускает явное представление через функцию Райта, а именно:

$$\begin{aligned} G_0(x, \xi, t, \tau) &= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{(\tau - t)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{2} \cdot \\ &\left[W_{-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}} \left(-|x - \xi|(\tau - t)^{-\frac{\alpha}{2}} \right) - W_{-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}} \left(-(x + \xi)(\tau - t)^{-\frac{\alpha}{2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.91)$$

Теперь наложим второе граничное условие $u(t, 0) = 0$. Для этого будет использован потенциал, распределённый по диагонали Σ_1 .

Определение 3.3.15. Для функции $\psi \in C([0, \infty))$ с компактным носителем определим диагональный потенциал

$$(\mathcal{P}\psi)(x, t) := \int_t^\infty G_0(x, \eta, t, \eta) \psi(\eta) d\eta = \quad (3.3.92)$$

$$= \int_t^\infty G_0(x, \eta, t, \eta) \psi(\eta) d\eta, (x, t) \in Q.$$

Его диагональный след обозначим

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}\psi)(t) &:= (\mathcal{P}\psi)(t, t) = \\ &= \int_t^\infty K(t, \eta) \psi(\eta) d\eta, K(t, \eta) := G_0(t, \eta, t, \eta), 0 < t < \eta. \end{aligned} \quad (3.3.93)$$

Лемма 3.3.7. Для любой функции $\psi \in C([0, \infty))$ с компактным носителем функция $z = \mathcal{P}\psi$ удовлетворяет

$$(D_{\infty t}^\alpha z)(x, t) - z_{xx}(x, t) = 0, (x, t) \in Q, z(0, t) = 0. \quad (3.3.94)$$

Доказательство. Зафиксируем компактное множество $K \Subset Q$. Тогда существуют числа $0 < a_K < T_K < \infty, \varepsilon_K > 0$ такие, что $K \subset \{(x, t) \in Q: a_K < t < T_K, t - x > \varepsilon_K\}$. Пусть носитель функции ψ содержится в отрезке $[0, T_\psi]$. Для $(x, t) \in K$ и $\eta \geq t$ рассмотрим точку-источник (η, η) . Так как $\eta \geq t > x$ имеем $|(\eta, \eta) - (x, t)| \geq |(t, t) - (x, t)| = t - x \geq \varepsilon_K$.

Следовательно, все точки (η, η) , участвующие в интеграле (3.3.92), отделены от K положительным расстоянием. Поэтому функция $(x, t) \mapsto G_0(x, \eta, t, \eta)$ гладка по (x, t) в окрестности K , причём все её производные по x и t , возникающие в операторе $D_{\infty t}^\alpha - \partial_{xx}$ равномерно ограничены на множестве $K \times [0, T_\psi]$ Следовательно, в определении

$$z(x, t) = \int_t^\infty G_0(x, \eta, t, \eta) \psi(\eta) d\eta$$

допустимо дифференцирование по x и применение оператора $D_{\infty t}^\alpha$ под знаком интеграла на K .

Для каждого фиксированного $\eta > 0$ функция

$$(x, t) \mapsto G_0(x, \eta, t, \eta)$$

удовлетворяет уравнению

$$(D_{\infty t}^\alpha - \partial_{xx})G_0(\cdot, \eta, \cdot, \eta) = 0 \text{ в } K$$

поскольку её дельта-источник расположен в точке (η, η) на диагонали Σ_1 , а эта диагональ не пересекает K . Поэтому

$$(D_{\infty t}^{\alpha} z)(x, t) - z_{xx}(x, t) = \int_t^{\infty} [(D_{\infty t}^{\alpha} - \partial_{xx})G_0(x, \eta, t, \eta)]\psi(\eta)d\eta = 0 \text{ на } K.$$

Так как $K \Subset Q$ произвольно, получаем $(D_{\infty t}^{\alpha} z)(x, t) - z_{xx}(x, t) = 0$ в Q . Условие $z(0, t) = 0$ непосредственно следует из равенства $G_0(0, \eta, t, \eta) = 0$.

Лемма 3.3.8. Для всякой $\phi \in C^1([0, \tau])$ и всякого $0 < \beta < 1$ справедливо равенство

$$D_{\tau t}^{\beta} I_{\tau t}^{\beta} \phi = \phi \text{ на } (0, \tau). \quad (3.3.95)$$

Лемма 3.3.9. Положим $\nu := \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Для $0 < t < \eta$ ядро диагонального следа (3.3.93) допускает разложение

$$K(t, \eta) = \frac{1}{2\Gamma(\nu)} (\eta - t)^{\nu-1} + K_{\text{reg}}(t, \eta), \quad 0 < t < \eta \quad (3.3.96)$$

где функция

$$K_{\text{reg}}(t, \eta) := K(t, \eta) - \frac{1}{2\Gamma(\nu)} (\eta - t)^{\nu-1}$$

обладает следующим свойством: для любых $\tau > 0$ и $\delta \in (0, \tau)$ она продолжается непрерывно на замкнутую область $\Delta_{\tau, \delta} := \{(t, \eta) : \delta \leq t \leq \eta \leq \tau\}$. Более того, существует константа $C_{\alpha, \tau, \delta} > 0$ такая, что

$$|K_{\text{reg}}(t, \eta)| \leq C_{\alpha, \tau, \delta} (\eta - t)^{1-\nu}, \quad \delta \leq t < \eta \leq \tau \quad (3.3.97)$$

а на внутренности области $\Delta_{\tau, \delta}$ выполнена оценка

$$|\partial_t K_{\text{reg}}(t, \eta)| \leq C_{\alpha, \tau, \delta} (\eta - t)^{-\nu}, \quad \delta < t < \eta < \tau. \quad (3.3.98)$$

Доказательство. Подставляя $x = t, \xi = \eta, \tau = \eta$ в формулу (3.3.91), получаем

$$K(t, \eta) = \frac{(\eta - t)^{\nu-1}}{2} [W_{-\nu, \nu}(-(\eta - t)^{1-\nu}) - W_{-\nu, \nu}(-(t + \eta)(\eta - t)^{-\nu})]. \quad (3.3.99)$$

Обозначим $s := \eta - t$. Тогда первый аргумент в (3.3.99) равен $-s^{1-\nu}$. По степенному ряду функции Райта

$$W_{-\nu,\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} + \frac{z^2}{2\Gamma(-\nu)} + O(z^3), z \rightarrow 0$$

поскольку член при $m = 1$ исчезает: $\frac{1}{\Gamma(\nu-\nu)} = \frac{1}{\Gamma(0)} = 0$. Следовательно,

$$W_{-\nu,\nu}(-s^{1-\nu}) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} + O(s^{2-2\nu}), s \downarrow 0.$$

После умножения на $s^{\nu-1}/2$ получаем

$$\frac{s^{\nu-1}}{2} \left(W_{-\nu,\nu}(-s^{1-\nu}) - \frac{1}{\Gamma(\nu)} \right) = O(s^{1-\nu}).$$

Дифференцируя по s , имеем также

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{s^{\nu-1}}{2} \left(W_{-\nu,\nu}(-s^{1-\nu}) - \frac{1}{\Gamma(\nu)} \right) \right] = O(s^{-\nu}), s \downarrow 0.$$

Рассмотрим второе слагаемое в (3.3.99). Если $\delta \leq t \leq \eta \leq \tau$, то $t + \eta \geq 2\delta$, $z := (t + \eta)s^{-\nu} \geq 2\delta s^{-\nu}$. Поэтому при $s \downarrow 0$ аргумент $-(t + \eta)s^{-\nu}$ уходит в $-\infty$ равномерно по $(t, \eta) \in \Delta_{\tau,\delta}$. По стандартной асимптотике функции Райта и её производной на отрицательной полуоси, с учётом тождества $\frac{d}{dz} W_{\lambda,\mu}(z) = W_{\lambda,\lambda+\mu}(z)$ получаем: для каждого $N > 0$ существует константа $C_{N,\alpha,\tau,\delta} > 0$ такая, что

$$|W_{-\nu,\nu}(-(t + \eta)s^{-\nu})| + |W_{-\nu,0}(-(t + \eta)s^{-\nu})| \leq C_{N,\alpha,\tau,\delta} s^N \quad (3.3.100)$$

на множестве $\Delta_{\tau,\delta}$. Выбирая N достаточно большим, из (3.3.100) заключаем, что второе слагаемое в (3.3.99), а также его производная по t , удовлетворяют оценкам $O(s^{1-\nu}), O(s^{-\nu})$ равномерно на $\Delta_{\tau,\delta}$. Таким образом, функция

$$K_{\text{reg}}(t, \eta) = K(t, \eta) - \frac{1}{2\Gamma(\nu)} (\eta - t)^{\nu-1}$$

продолжается непрерывно на каждую область $\Delta_{\tau,\delta}$, причём выполняются оценки (3.3.97) и (3.3.98). Лемма доказана.

Лемма 3.3.10. Пусть $\tau > 0, \xi \in (0, \tau)$ фиксированы. Положим

$$g_{\xi,\tau}(t) := G_0(t, \xi, t, \tau), 0 < t < \tau \quad (3.3.101)$$

Тогда существует единственная функция $\varphi(\cdot; \xi, \tau) \in C_{\text{loc}}((0, \tau))$, обладающая следующим свойством: для каждого $a \in (0, \tau)$ её ограничение на интервал (a, τ) удовлетворяет уравнению первого рода

$$\int_t^\tau K(t, \eta) \varphi(\eta; \xi, \tau) d\eta = g_{\xi, \tau}(t), \quad a < t < \tau. \quad (3.3.102)$$

На каждом таком интервале уравнение (3.3.102) эквивалентно вольтерровому уравнению второго рода

$$\varphi(t; \xi, \tau) + \int_t^\tau V_\tau(t, \eta) \varphi(\eta; \xi, \tau) d\eta = h_{\xi, \tau}(t), \quad a < t < \tau, \quad (3.3.103)$$

где

$$h_{\xi, \tau}(t) := 2 \left(D_{\tau t}^{\frac{\alpha}{2}} g_{\xi, \tau} \right) (t), \quad (3.3.104)$$

$$V_\tau(t, \eta) := - \frac{2}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \frac{\partial}{\partial t} \int_t^\eta \frac{K_{\text{reg}}(\zeta, \eta)}{(\zeta - t)^{\frac{\alpha}{2}}} d\zeta, \quad 0 < t < \eta < \tau. \quad (3.3.105)$$

При этом для каждого $a \in (0, \tau)$ существует константа $C_{\alpha, \tau, a} > 0$ такая, что

$$|V_\tau(t, \eta)| \leq C_{\alpha, \tau, a} (\eta - t)^{-\alpha/2}, \quad a < t < \eta < \tau. \quad (3.3.106)$$

Следовательно, на каждом интервале (a, τ) уравнение (3.3.103) имеет единственное решение, представимое через резольвенту

$$\varphi(t; \xi, \tau) = h_{\xi, \tau}(t) + \int_t^\tau \mathfrak{R}_\tau(t, \eta) h_{\xi, \tau}(\eta) d\eta, \quad a < t < \tau, \quad (3.3.107)$$

где

$$\mathfrak{R}_\tau(t, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m V_\tau^{(*m)}(t, \eta) \quad (3.3.108)$$

а $V_\tau^{(*m)}$ – m -кратные вольтерровы свёртки по переменной η .

Доказательство. Положим $\nu := \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ и зафиксируем число $a \in (0, \tau)$.

На полосе $a < t < \eta < \tau$ разложение (3.3.96) даёт

$$\frac{1}{2} (I_{\tau t}^\nu \varphi)(t) + \int_t^\tau K_{\text{reg}}(t, \eta) \varphi(\eta; \xi, \tau) d\eta = g_{\xi, \tau}(t), \quad a < t < \tau. \quad (3.3.109)$$

Применим к (3.3.109) оператор $2D_{\tau t}^\nu$. Получаем

$$\varphi(t; \xi, \tau) + 2D_{\tau t}^\nu \left[\int_t^\tau K_{\text{reg}}(t, \eta) \varphi(\eta; \xi, \tau) d\eta \right] = 2D_{\tau t}^\nu g_{\xi, \tau}(t).$$

Рассмотрим второе слагаемое. Обозначим

$$F(t) := \int_t^\tau K_{\text{reg}}(t, \eta) \varphi(\eta; \xi, \tau) d\eta.$$

Тогда

$$D_{\tau t}^\nu F(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_t^\tau \frac{F(\zeta)}{(\zeta-t)^\nu} d\zeta.$$

По теореме Фубини

$$\begin{aligned} \int_t^\tau \frac{F(\zeta)}{(\zeta-t)^\nu} d\zeta &= \int_t^\tau \frac{1}{(\zeta-t)^\nu} \left(\int_\zeta^\tau K_{\text{reg}}(\zeta, \eta) \varphi(\eta; \xi, \tau) d\eta \right) d\zeta \\ &= \int_t^\tau \varphi(\eta; \xi, \tau) \left(\int_t^\eta \frac{K_{\text{reg}}(\zeta, \eta)}{(\zeta-t)^\nu} d\zeta \right) d\eta. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл обозначим через

$$J(t, \eta) := \int_t^\eta \frac{K_{\text{reg}}(\zeta, \eta)}{(\zeta-t)^\nu} d\zeta.$$

Подстановкой $\zeta = t + r(\eta - t)$, $0 \leq r \leq 1$, получаем

$$J(t, \eta) = (\eta - t)^{1-\nu} \int_0^1 r^{-\nu} K_{\text{reg}}(t + r(\eta - t), \eta) dr.$$

Из оценок (3.3.97) и (3.3.98) следует, что функция J принадлежит классу C^1 по переменной t на области $a < t < \eta < \tau$ и

$$|\partial_t J(t, \eta)| \leq C_{\alpha, \tau, a} (\eta - t)^{-\nu}, \quad a < t < \eta < \tau.$$

Поэтому допускается дифференцирование по t под знаком интеграла по η , и мы получаем

$$2D_{tt}^{\nu}F(t) = \int_t^{\tau} V_{\tau}(t, \eta)\varphi(\eta; \xi, \tau)d\eta,$$

где V_{τ} определяется формулой (3.3.105). Тем самым доказано уравнение (3.3.103). Оценка (3.3.106) уже установлена. Так как $\nu = \frac{\alpha}{2} < 1$, особенность ядра интегрируема по переменной η . Следовательно, на каждом интервале (a, τ) уравнение (3.3.103) является стандартным вольтерровым уравнением второго рода со слабо сингулярным ядром. По общей теории таких уравнений оно имеет единственное непрерывное решение, причём резольвента задаётся сходящимся рядом Неймана, а решение имеет вид (3.3.107).

Если теперь $0 < a_1 < a_2 < \tau$, то ограничения решений, построенных на интервалах (a_1, τ) и (a_2, τ) , обе удовлетворяют одному и тому же уравнению второго рода на (a_2, τ) . По единственности они совпадают на (a_2, τ) . Следовательно, локальные решения согласованы на пересечениях и определяют единственную функцию $\varphi(\cdot; \xi, \tau) \in C_{\text{loc}}((0, \tau))$, обладающую указанным свойством. Лемма доказана.

Теорема 3.3.6. Для $0 < x < t < \tau, 0 < \xi < \tau$ полная функция Грина задачи (3.3.19)-(3.3.22) задаётся формулой

$$G_Q(x, \xi, t, \tau) := G_0(x, \xi, t, \tau) - \int_t^{\tau} G_0(x, \eta, t, \eta)\varphi(\eta; \xi, \tau)d\eta, \quad (3.3.110)$$

Для всякой $\tilde{f} \in C_c^{\infty}(\mathbb{H})$, поддержанной в Q , функция

$$u(x, t) = \int_t^{\infty} \int_0^{\tau} G_Q(x, \xi, t, \tau)f(\xi, \tau)d\xi d\tau, \quad (x, t) \in Q \quad (3.3.111)$$

является классическим решением задачи (3.3.19)-(3.3.21).

Доказательство. Так как f компактно поддержана в Q , существует число $T_f > 0$ такое, что $f(\xi, \tau) = 0$ при $\tau \geq T_f$. Поэтому в (3.3.111) интегрирование по τ фактически ведётся по конечному отрезку $[t, T_f]$. Разобьём (3.3.111) в сумму

$$u = w - z, \quad (3.3.112)$$

где

$$w(x, t) := \int_t^{\infty} \int_0^{\infty} G_0(x, \xi, t, \tau)\tilde{f}(\xi, \tau)d\xi d\tau \quad (3.3.113)$$

$$z(x, t) := \int_t^{\infty} \int_0^{\tau} \left(\int_t^{\tau} G_0(x, \eta, t, \eta)\varphi(\eta; \xi, \tau)d\eta \right) f(\xi, \tau)d\xi d\tau. \quad (3.3.114)$$

Функция w удовлетворяет

$$(D_{\infty t}^{\alpha} w) - w_{xx} = \tilde{f} \text{ в } \mathbb{H}, w(0, t) = 0.$$

Покажем, что z удовлетворяет однородному уравнению в Q . Зафиксируем компактное множество $K \Subset Q$. Тогда существуют числа $0 < a_K < T_K < \infty, \varepsilon_K > 0$ такие, что $K \subset \{(x, t) \in Q: a_K < t < T_K, t - x > \varepsilon_K\}$. Для каждого (ξ, τ) из носителя f функция $\eta \mapsto \varphi(\eta; \xi, \tau)$ непрерывна на отрезке $[a_K/2, \tau]$. Поэтому её можно продолжить до функции $\psi_{\xi, \tau} \in C([0, \infty))$ с компактным носителем в $[a_K/2, \tau]$ так, чтобы $\psi_{\xi, \tau}(\eta) = \varphi(\eta; \xi, \tau)$ при $\eta \in [a_K, \tau]$. Для $(x, t) \in K$ имеем $t \geq a_K$, и потому

$$\int_t^{\tau} G_0(x, \eta, t, \eta) \varphi(\eta; \xi, \tau) d\eta = \int_t^{\infty} G_0(x, \eta, t, \eta) \psi_{\xi, \tau}(\eta) d\eta = (\mathcal{P}\psi_{\xi, \tau})(x, t)$$

каждая функция

$$(x, t) \mapsto (\mathcal{P}\psi_{\xi, \tau})(x, t)$$

удовлетворяет однородному уравнению на K . Так как интегрирование по (ξ, τ) ведётся по компактному множеству, из линейности и теоремы Фубини получаем

$$(D_{\infty t}^{\alpha} z) - z_{xx} = 0 \text{ на } K.$$

Поскольку $K \Subset Q$ произвольно, отсюда следует $(D_{\infty t}^{\alpha} z) - z_{xx} = 0$ в Q . Кроме того, $z(0, t) = 0$ поскольку $G_0(0, \eta, t, \eta) = 0$. Из (3.3.112) теперь получаем

$$(D_{\infty t}^{\alpha} u) - u_{xx} = f \text{ в } Q, u(0, t) = 0.$$

Остаётся проверить условие на диагонали. Зафиксируем $t > 0$ и выберем произвольное число $a \in (0, t)$. Тогда уравнение первого рода (3.3.102) справедливо на интервале (a, τ) , а значит и в точке t :

$$\int_t^{\tau} K(t, \eta) \varphi(\eta; \xi, \tau) d\eta = g_{\xi, \tau}(t).$$

Поэтому

$$w(t, t) = \int_t^{\infty} \int_0^{\tau} g_{\xi, \tau}(t) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

$$z(t, t) = \int_t^{\infty} \int_0^{\tau} \left(\int_t^{\tau} K(t, \eta) \varphi(\eta; \xi, \tau) d\eta \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = w(t, t).$$

Следовательно, $u(t, t) = w(t, t) - z(t, t) = 0$. Тем самым выполнены оба граничных условия (3.3.20). Условие убывания (3.3.21) для компактно поддержанной функции f выполняется автоматически, поскольку при $t > T_f$ интеграл (3.3.111) берётся по пустому промежутку. Следовательно,

$$u(x, t) = 0 \text{ при } t \geq T_f.$$

В частности, (3.3.21) выполнено. Итак, функция (3.3.111) является классическим решением задачи (3.3.19)-(3.3.21). Теорема доказана.

Теорема единственности

Теорема 3.3.7. Пусть $u_1, u_2 \in \mathcal{E}_\sigma(Q)$ – два классических решения задачи (3.3.19)-(3.3.21) с одной и той же правой частью f . Тогда

$$u_1 \equiv u_2 \text{ в } Q. \quad (3.3.115)$$

Доказательство. Разность $w := u_1 - u_2$ удовлетворяет однородной задаче

$$\begin{aligned} (D_{\infty t}^\alpha w) - w_{xx} &= 0 \text{ в } Q \\ w(0, t) = 0, w(t, t) &= 0, \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ t \geq T}} \sup_{(x, t) \in Q} (1+t)^\sigma |w(x, t)| = 0. \end{aligned}$$

Так как класс $\mathcal{E}_\sigma(Q)$ линейный, имеем $w \in \mathcal{E}_\sigma(Q)$. Следовательно, $w \equiv 0$ это и есть (3.3.115). Теорема доказана.

Замечание 3.3.5. В теореме граничные члены исчезают по двум причинам. Пространственные члены зануляются условиями Дирихле (3.3.20). Временные граничные члены на бесконечности исчезают по условию (3.3.21) и по включению $u \in \mathcal{E}_\sigma(Q)$, где это затухание было явно заложено в виде условий.

Теорема существования

Определение 3.3.16. Функция u является обобщённым решением задачи (3.3.19)-(3.3.21), если для каждого $T > 0$ выполняются условия:

1. $u|_{Q_T} \in L^2(Q_T)$ и $u_x|_{Q_T} \in L^2(Q_T)$;
2. для почти всех $t \in (0, T)$ срез $u(\cdot, t)$ принадлежит $H_0^1(0, t)$;
3. для всех $\varphi \in \mathcal{T}$ с носителем в Q_T справедливо тождество

$$\iint_{Q_T} (u_x \varphi_x + u({}^c D_{xt}^\alpha \varphi)) dx dt = \iint_{Q_T} f \varphi dx dt. \quad (3.3.116)$$

Теорема 3.3.8. Пусть $f \in \mathcal{F}_\sigma(Q) \cap L_{\text{loc}}^2(Q)$. Предположим, что для каждого $T > 0$ выбрана последовательность $f_m^{(T)} \in C_c^\infty(Q_{T+1})$, $f_m^{(T)} \rightarrow f$ в $L^2(Q_{T+1})$ и соответствующая последовательность классических решений $u_m^{(T)}$ задачи (3.3.19)-(3.3.21) с правыми частями $f_m^{(T)}$, обладающих следующими дополнительными свойствами на Q_{T+1} :

1. $u_m^{(T)}(x, t) = 0$ при $t \geq T + 1$;
2. для почти всех $x \in (0, T + 1)$ отражённые срезы

$$y_{m,x,T+1}(r) := \begin{cases} u_m^{(T)}(x, T + 1 - r), & 0 < r < T + 1 - x \\ 0, & r \geq T + 1 - x. \end{cases}$$

3. удовлетворяют условиям леммы 3.3.5 при $\mu = \alpha$; 3. для почти всех $x \in (0, T + 1)$ срезы

$$v_{m,x}(s) := \begin{cases} u_m^{(T)}(x, x + s), & 0 < s < T + 1 - x \\ 0, & s \geq T + 1 - x. \end{cases}$$

4. удовлетворяют условиям леммы 3.3.5 при $\mu = \alpha - 1$; 4. для почти всех $x \in (0, T + 1)$ выполнены условия

$$\begin{aligned} & \partial_t u_m^{(T)}(x, \cdot) \in L^1(x, T + 1) \\ & \int_x^{T+1} \int_t^{T+1} \frac{|u_m^{(T)}(x, \tau)| |\partial_t u_m^{(T)}(x, t)|}{(\tau - t)^{\alpha-1}} d\tau dt < \infty. \end{aligned}$$

5. для почти всех $t \in (0, T + 1)$ выполнено $u_m^{(T)}(\cdot, t) \in H_0^1(0, t)$.

Тогда существует функция u такая, что для каждого $T > 0$ после выделения подпоследовательности

$$u_m^{(T)} \rightarrow u^{(T)} \text{ сильно в } L^2(Q_T) \quad (3.3.117)$$

$$u_{m,x}^{(T)} \rightharpoonup u_x^{(T)} \text{ слабо в } L^2(Q_T) \quad (3.3.118)$$

причём предел $u^{(T)}$ удовлетворяет определению обобщенной функции на Q_T . Локальные пределы $u^{(T)}$ согласованы при разных T и склеиваются в глобальную функцию и на Q .

Более того, предел не зависит ни от выбора подпоследовательности, ни от выбора аппроксимирующей последовательности $\{f_m^{(T)}\}$, удовлетворяющей перечисленным выше условиям. В частности, таким образом определяется единственное аппроксимационное обобщённое решение задачи (3.3.19)-(3.3.21).

Доказательство. Для $T > 0$ положим $Q_T := \{(x, t) \in Q : 0 < x < t < T\}$. Если функция h задана на Q , то обозначим её усечённый по времени носитель условием $\text{supp}_t h \subset [0, T] \Leftrightarrow h(x, t) = 0$ при $t \geq T$. Легко показать

$$\|u_m^{(T)}\|_{L^2(Q_{T+1})} + \|u_{m,x}^{(T)}\|_{L^2(Q_{T+1})} \leq C_1(\alpha, T) \|f_m^{(T)}\|_{L^2(Q_{T+1})} \quad (3.3.119)$$

$$\int_0^{T+1} [\tilde{v}_{m,x}]_{H^{(\alpha-1)/2}(\mathbb{R})}^2 dx \leq C_2(\alpha, T) \|f_m^{(T)}\|_{L^2(Q_{T+1})}^2. \quad (3.3.120)$$

Так как $f_m^{(T)} \rightarrow f$ в $L^2(Q_{T+1})$, правые части в (3.3.119)-(3.3.120) равномерно ограничены по m .

Ограничивая (3.3.119)-(3.3.120) на Q_T , получаем

$$\begin{aligned} \sup_m \|u_m^{(T)}\|_{L^2(Q_T)} < \infty, \sup_m \|u_{m,x}^{(T)}\|_{L^2(Q_T)} < \infty \\ \sup_m \int_0^T [\tilde{v}_{m,x}]_{H^{(\alpha-1)/2}(\mathbb{R})}^2 dx < \infty. \end{aligned}$$

Кроме того, по условию 5 для почти всех $t \in (0, T)$ выполнено $u_m^{(T)}(\cdot, t) \in H_0^1(0, t)$. Существует подпоследовательность, которую для краткости снова обозначим через $\{u_m^{(T)}\}$, такая, что $u_m^{(T)} \rightarrow u^{(T)}$ сильно в $L^2(Q_T)$. Из ограниченности $\{u_{m,x}^{(T)}\}$ в $L^2(Q_T)$ после выделения подпоследовательности имеем также $u_{m,x}^{(T)} \rightharpoonup u_x^{(T)}$ слабо в $L^2(Q_T)$. Это и есть (3.3.117)-(3.3.118).

Продолжим каждую функцию $u_m^{(T)}$ нулём на квадрат $\Pi_T := (0, T) \times (0, T)$ вне треугольника Q_T . Полученное продолжение обозначим через $U_m^{(T)}$. Так как по условию 5 почти для всех $t \in (0, T)$ имеем $u_m^{(T)}(\cdot, t) \in H_0^1(0, t)$ нулевое продолжение по переменной x принадлежит $H_0^1(0, T)$. Следовательно, $U_m^{(T)} \in L^2((0, T); H_0^1(0, T))$ причём по (3.3.119) $\sup_m \|U_m^{(T)}\|_{L^2((0, T); H_0^1(0, T))} < \infty$. Поэтому

после дополнительного выделения подпоследовательности $U_m^{(T)} \rightharpoonup U^{(T)}$ слабо в $L^2((0, T); H_0^1(0, T))$. Из сильной сходимости в $L^2(Q_T)$ и того, что $U_m^{(T)} = 0$ вне Q_T , следует сильная сходимость $U_m^{(T)} \rightarrow U^{(T)}$ в $L^2(\Pi_T)$, где $U^{(T)}$ совпадает с нулевым продолжением функции $u^{(T)}$. Следовательно, $U^{(T)} \in L^2((0, T); H_0^1(0, T))$. Так как $U^{(T)} = 0$ почти всюду на множестве $\Pi_T \setminus Q_T$, получаем $u^{(T)}(\cdot, t) \in H_0^1(0, t)$ для почти всех $t \in (0, T)$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{T}$ и $\text{supp } \varphi \subset Q_T$. Так как $u_m^{(T)}$ - классические решения, по предложению 3.3.5 для каждого m выполнено тождество

$$\iint_{Q_T} \left(u_{m,x}^{(T)} \varphi_x + u_m^{(T)} ({}^c D_{xt}^\alpha \varphi) \right) dx dt = \iint_{Q_T} f_m^{(T)} \varphi dx dt. \quad (3.3.121)$$

Здесь ${}^c D_{xt}^\alpha \varphi$ - гладкая функция с компактным носителем в Q_T . Поэтому из (3.3.117), (3.3.118) и сходимости $f_m^{(T)} \rightarrow f$ в $L^2(Q_T)$ можно перейти к пределу в каждом слагаемом:

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} u_{m,x}^{(T)} \varphi_x dx dt &\rightarrow \iint_{Q_T} u_x^{(T)} \varphi_x dx dt \\ \iint_{Q_T} u_m^{(T)} ({}^C D_{xt}^\alpha \varphi) dx dt &\rightarrow \iint_{Q_T} u^{(T)} ({}^C D_{xt}^\alpha \varphi) dx dt \\ \iint_{Q_T} f_m^{(T)} \varphi dx dt &\rightarrow \iint_{Q_T} f \varphi dx dt. \end{aligned}$$

Следовательно, предел $u^{(T)}$ удовлетворяет (3.3.116). Это означает, что $u^{(T)}$ является обобщённым решением в смысле определения на Q_T .

Пусть теперь $\{g_m^{(T)}\} \subset C_c^\infty(Q_{T+1})$ - другая аппроксимирующая последовательность, $g_m^{(T)} \rightarrow f$ в $L^2(Q_{T+1})$, и $w_m^{(T)}$ - соответствующие классические решения, удовлетворяющие тем же дополнительным условиям 1 - 5. Для $z_m^{(T)} := u_m^{(T)} - w_m^{(T)}$ имеем

$$\|z_m^{(T)}\|_{L^2(Q_T)} \leq \|z_m^{(T)}\|_{L^2(Q_{T+1})} \leq \frac{(T+1)^2}{\pi^2} \|f_m^{(T)} - g_m^{(T)}\|_{L^2(Q_{T+1})}.$$

Правая часть стремится к нулю. Значит, предел в $L^2(Q_T)$ единственен и не зависит ни от выбора подпоследовательности, ни от выбора аппроксимирующей последовательности. Пусть $0 < T_1 < T_2$. Тогда можно выбрать аппроксимацию на Q_{T_2+1} и рассмотреть её ограничения на Q_{T_1+1} . По только что доказанной независимости предела локальные пределы совпадают на пересечении: $u^{(T_2)}|_{Q_{T_1}} = u^{(T_1)}$. Следовательно, семейство $\{u^{(T)}\}_{T>0}$ склеивается в глобальную функцию u на Q . Полученная функция u является обобщённым решением на каждом Q_T . Она единственна в классе всех пределов регулярных аппроксимационных схем, удовлетворяющих условиям 1-5. Теорема доказана.

Замечание 3.3.6. Если $f \in C_c^\infty(Q)$, то обобщённое решение совпадает с классическим решением. Действительно, в этом случае в роли аппроксимирующей последовательности можно взять стационарную последовательность $f_m^{(T)} \equiv f$ при достаточно больших T , и предельный переход становится тривиальным.

Теорема 3.3.9. Пусть $1 < \alpha < 2, \sigma > 2 - \alpha, Q := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < t, t > 0\}$, и пусть $f \in C_c^\infty(Q)$. Тогда задача

$$\begin{aligned} (D_{\infty t}^\alpha u)(x, t) - u_{xx}(x, t) &= f(x, t), (x, t) \in Q \\ u(0, t) = 0, u(t, t) = 0, \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\substack{(x,t) \in Q \\ t \geq T}} (1+t)^\sigma |u(x, t)| &= 0. \end{aligned}$$

имеет классическое решение $u \in C(Q) \cap C_x^2(Q) \cap C_t^\alpha(Q)$, причём это решение задаётся формулой

$$u(x, t) = \int_t^\infty \int_0^\tau G_Q(x, \xi, t, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, (x, t) \in Q.$$

Здесь

$$G_Q(x, \xi, t, \tau) := \begin{cases} G_0(x, \xi, t, \tau) - \int_t^\tau G_0(x, \eta, t, \eta) \varphi(\eta; \xi, \tau) d\eta, & 0 < x < t < \tau, 0 < \xi < \tau, \\ 0, & \tau \leq t, \end{cases}$$

где

$$G_0(x, \xi, t, \tau) := \frac{(\tau - t)^{\alpha/2 - 1}}{2} \left[W_{-\alpha/2, \alpha/2}(-|x - \xi|(\tau - t)^{-\alpha/2}) - W_{-\alpha/2, \alpha/2}(-(x + \xi)(\tau - t)^{-\alpha/2}) \right], \quad \tau > t.$$

Для фиксированных ξ, τ , где $0 < \xi < \tau$, функция $\varphi(\cdot; \xi, \tau)$ есть единственное локально непрерывное решение уравнения

$$\int_t^\tau K(t, \eta) \varphi(\eta; \xi, \tau) d\eta = g_{\xi, \tau}(t), \quad 0 < t < \tau,$$

в котором

$$g_{\xi, \tau}(t) := G_0(t, \xi, t, \tau), K(t, \eta) := G_0(t, \eta, t, \eta).$$

Если, кроме того, рассматриваются только те классические решения, которые принадлежат классу $\mathcal{E}_\sigma(Q)$, то это решение единственно в этом классе.

4 ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ЯДРОМ РАЙТА

4.1 Преобразование Станковича

В этой главе рассматривается применение интегрального преобразования Станковича к уравнениям с правосторонней дробной производной Римана-Лиувилля. Основная идея состоит в том, что преобразование с ядром Райта переводит дробное дифференцирование порядка γ , $0 < \gamma < 1$, по переменной t в обычное дифференцирование первого порядка по новой переменной x . В результате дробное эволюционное уравнение сводится к классическому уравнению первого порядка или к классической абстрактной параболической задаче. Особое внимание уделяется знакам. Если A - положительный самосопряжённый оператор, то в настоящей главе основной правосторонний аналог параболического уравнения имеет вид

$$D_{\infty t}^{\gamma} u(t) - Au(t) = 0. \quad (4.1.1)$$

Это согласуется с тем, что при $\gamma = 1$ правосторонняя производная становится $D_{\infty t}^1 = -\frac{d}{dt}$. Поэтому формальный предельный случай (4.1.1) даёт $-u_t - Au = 0$, то есть после умножения на -1 обычное параболическое уравнение $u_t + Au = 0$. Именно эта логика используется ниже в примерах второго и четвёртого порядков.

Преобразованием Станковича функции v называется интегральное преобразование [72]

$$(B_{\beta, \nu} v)(x) = \int_0^{\infty} w_{\beta, \nu}(x, t) v(t) dt, x \geq 0 \quad (4.1.2)$$

если интеграл в правой части существует.

Параметр ν является нормировочным, так как он влияет на степенной множитель в преобразовании экспонент, но не меняет основной механизм перехода от дробного уравнения к уравнению первого порядка. Для существования $B_{\beta, \nu} v(0)$ достаточно условия $\int_0^{\infty} t^{\nu-1} |v(t)| dt < \infty$. При $x > 0$ поведение ядра в окрестности нуля улучшается за счёт экспоненциального убывания функции Райта в соответствующем секторе.

Лемма 4.1.1. Пусть $0 < \beta < 1, \nu > 0$. Тогда для $\text{Res} > 0$ справедливо равенство $\int_0^{\infty} e^{-st} w_{\beta, \nu}(x, t) dt = s^{-\nu} e^{-xs^{\beta}}, x \geq 0$, где степень s^{β} берётся в главной ветви. Из (4.1.4) сразу следует важная формула для экспоненты. Если $\text{Res} > 0$, то $B_{\beta, \nu}(e^{-ct})(x) = c^{-\nu} e^{-c^{\beta} x}$

Следовательно,

$$B_{\beta, \nu}(c^{\nu} e^{-ct})(x) = e^{-c^{\beta} x} \quad (4.1.3)$$

Лемма 4.1.2. Пусть $0 < \beta < 1, \delta > 0, \nu > \beta\delta$. Тогда

$$D_{0t}^{\beta\delta} w_{\beta,\nu}(x, t) = w_{\beta,\nu-\beta\delta}(x, t), \quad (4.1.4)$$

$$D_{\infty x}^{\delta} w_{\beta,\nu}(x, t) = w_{\beta,\nu-\beta\delta}(x, t). \quad (4.1.5)$$

Определение 4.3. Пусть $0 < \beta < 1, \delta > 0, \nu > \beta\delta$. Будем говорить, что функция v принадлежит допустимому классу $\mathcal{M}_{\beta,\nu}^{(\delta)}$, если выполнены следующие условия: интегралы, определяющие $B_{\beta,\nu}v$ и $B_{\beta,\nu-\beta\delta}v$, существуют; для каждого компакта $K \subset [0, \infty)$ $\int_0^{\infty} |v(t)| \sup_{x \in K} (|w_{\beta,\nu}(x, t)| + |w_{\beta,\nu-\beta\delta}(x, t)|) dt < \infty$; правосторонняя производная $D_{\infty t}^{\beta\delta}v$ существует и преобразование $B_{\beta,\nu}(D_{\infty t}^{\beta\delta}v)$ существует; справедлива формула дробного интегрирования по частям

$$\int_0^{\infty} w_{\beta,\nu}(x, t) D_{\infty t}^{\beta\delta} v(t) dt = \int_0^{\infty} v(t) D_{0t}^{\beta\delta} w_{\beta,\nu}(x, t) dt. \quad (4.1.6)$$

Последнее условие означает, что граничные слагаемые в формуле дробного интегрирования по частям равны нулю. Для убывающих экспонент и для конечных линейных комбинаций таких экспонент это условие выполняется.

Теорема 4.1.1. Пусть $0 < \beta < 1, \delta > 0, \nu > \beta\delta, v \in \mathcal{M}_{\beta,\nu}^{(\delta)}$. Тогда

$$B_{\beta,\nu}(D_{\infty t}^{\beta\delta}v)(x) = D_{\infty x}^{\delta} B_{\beta,\nu}v(x) \quad (4.1.7)$$

Доказательство. По формуле интегрирования по частям (4.1.6) и по (4.1.4) имеем

$$\begin{aligned} B_{\beta,\nu}(D_{\infty t}^{\beta\delta}v)(x) &= \int_0^{\infty} w_{\beta,\nu}(x, t) D_{\infty t}^{\beta\delta} v(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} v(t) D_{0t}^{\beta\delta} w_{\beta,\nu}(x, t) dt \\ &= \int_0^{\infty} v(t) w_{\beta,\nu-\beta\delta}(x, t) dt \\ &= B_{\beta,\nu-\beta\delta}v(x) \end{aligned}$$

С другой стороны, по (4.1.5) $D_{\infty x}^{\delta} B_{\beta,\nu}v(x) = B_{\beta,\nu-\beta\delta}v(x)$. Отсюда следует (4.1.6).

Следствие 4.1.1. Пусть $0 < \gamma < 1, \nu > \gamma, v \in \mathcal{M}_{\gamma,\nu}^{(1)}$. Тогда

$$B_{\gamma,\nu}(D_{\infty t}^{\gamma}v)(x) = -\frac{d}{dx} B_{\gamma,\nu}v(x) \quad (4.1.8)$$

4.2 Скалярные однородное и неоднородное уравнения

Рассмотрим уравнение

$$D_{\infty t}^{\gamma} u(t) + \lambda u(t) = 0, 0 < \gamma < 1, \lambda \in \mathbb{C}. \quad (4.2.1)$$

Пусть $\nu > \gamma$ и u принадлежит классу, в котором применима коммутационная формула (4.1.8). Положим $V(x) = B_{\gamma, \nu} u(x)$. Тогда уравнение (4.2.1) переходит в $-V'(x) + \lambda V(x) = 0$. Отсюда $V(x) = Ce^{\lambda x}, C \in \mathbb{C}$. Найдём экспоненциальный прообраз. Подстановка $u(t) = Ce^{-kt}, \operatorname{Re} k > 0$ в (4.2.1) с учётом (4.2.5) даёт

$$k^{\gamma} + \lambda = 0, \text{ то есть } k^{\gamma} = -\lambda. \quad (4.2.2)$$

Обозначим $S_{\theta} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\operatorname{Arg} z| < \theta\}$

Теорема 4.2.1. Пусть $0 < \gamma < 1, \lambda \neq 0$. Уравнение (4.2.1) имеет ненулевое решение вида $u(t) = Ce^{-kt}, \operatorname{Re} k > 0$ в главной ветви степени тогда и только тогда, когда

$$-\lambda \in S_{\gamma\pi/2}, \text{ то есть } |\operatorname{Arg}(-\lambda)| < \frac{\gamma\pi}{2}. \quad (4.2.3)$$

В этом случае $k = (-\lambda)^{1/\gamma}$, и все убывающие экспоненциальные решения имеют вид $u(t) = Ce^{-(\lambda)^{1/\gamma} t}$. Если требуется получить образ $V(x) = Ce^{\lambda x}$, то нормированное решение записывается как $u(t) = Ck^{\nu} e^{-kt}, k = (-\lambda)^{1/\gamma}$, поскольку

$$B_{\gamma, \nu}(k^{\nu} e^{-kt})(x) = e^{-k^{\gamma} x} = e^{\lambda x} \quad (4.2.4)$$

Доказательство. Если $u(t) = Ce^{-kt}, \operatorname{Re} k > 0$, является решением, то (4.2.2) выполнено. Из $\operatorname{Re} k > 0$ следует $|\operatorname{Arg} k| < \pi/2$. Поэтому $|\operatorname{Arg}(-\lambda)| = |\operatorname{Arg}(k^{\gamma})| = \gamma|\operatorname{Arg} k| < \frac{\gamma\pi}{2}$. Это доказывает необходимость. Обратно, если (4.2.3) выполнено, то число $k = (-\lambda)^{1/\gamma}$ определено в главной ветви и удовлетворяет $|\operatorname{Arg} k| = \frac{1}{\gamma}|\operatorname{Arg}(-\lambda)| < \frac{\pi}{2}$. Значит, $\operatorname{Re} k > 0$. $D_{\infty t}^{\gamma} e^{-kt} = k^{\gamma} e^{-kt} = -\lambda e^{-kt}$ и потому e^{-kt} удовлетворяет (4.2.1). Нормировка (4.2.4) следует из (4.1.3).

Замечание 4.7. Если $\lambda < 0$, то $-\lambda > 0$, и условие (4.2.3) выполнено автоматически. Именно этот случай возникает при спектральном разложении уравнения $D_{\infty t}^{\gamma} u - Au = 0$ с положительным оператором A : для собственного значения $\mu > 0$ получается $\lambda = -\mu$. Если же $\lambda > 0$, то $-\lambda$ лежит на отрицательной вещественной полуоси, и в рассматриваемой главной ветви убывающего экспоненциального решения нет.

Рассмотрим уравнение $D_{\infty t}^{\gamma} u(t) + \lambda u(t) = f(t), 0 < \gamma < 1$. Если $V(x) = B_{\gamma, \nu} u(x), F(x) = B_{\gamma, \nu} f(x)$, то по (4.1.8) получаем $-V'(x) + \lambda V(x) = F(x)$. При

условии $V(x_0) = V_0$ решение имеет вид $V(x) = V_0 e^{\lambda(x-x_0)} - \int_{x_0}^x e^{\lambda(x-s)} F(s) ds$. Если правая часть является конечной суммой экспонент $f(t) = \sum_{j=1}^N f_j e^{-a_j t}$, $\text{Re} a_j > 0$ и $a_j^\gamma + \lambda \neq 0, j = 1, \dots, N$, то частное решение можно записать в явном виде: $u_p(t) = \sum_{j=1}^N \frac{f_j}{a_j^\gamma + \lambda} e^{-a_j t}$. Действительно, каждое слагаемое удовлетворяет равенству $(D_{\infty t}^\gamma + \lambda) \left(\frac{f_j}{a_j^\gamma + \lambda} e^{-a_j t} \right) = f_j e^{-a_j t}$. В резонансном случае $a_j^\gamma + \lambda = 0$ используется формула $D_{\infty t}^\gamma (t e^{-a_j t}) = a_j^\gamma t e^{-a_j t} - \gamma a_j^{\gamma-1} e^{-a_j t}$, $\text{Re} a_j > 0$, которая получается дифференцированием равенства

$$D_{\infty t}^\alpha e^{-ct} = c^\alpha e^{-ct}, \text{Re} c > 0, \alpha > 0 \quad (4.2.5)$$

по параметру a_j . Тогда частное решение для слагаемого $f_j e^{-a_j t}$ имеет вид $u_{p,j}(t) = -\frac{f_j}{\gamma a_j^{\gamma-1}} t e^{-a_j t}$

4.3 Уравнение с положительным самосопряжённым оператором

В этом пункте операторная часть записывается в более строгой форме. Важно разделять две разные величины: начальный элемент исходной полугруппы $g \in H$ и начальный элемент преобразованной задачи $h = V(0)$. Они связаны равенством $h = A^{-\nu/\gamma} g$, поэтому множитель $A^{\nu/\gamma}$ в формулах возникает не из самого дифференциального уравнения, а из выбранной нормировки преобразования Станковича.

Спектральные степени оператора

Пусть H - комплексное гильбертово пространство, а A - строго положительный самосопряжённый оператор в H

$$A = A^*, A \geq a_0 I, a_0 > 0. \quad (4.3.1)$$

По спектральной теореме $A = \int_{[a_0, \infty)} \mu dE_\mu$, где E_μ - спектральная мера оператора A . Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ степень A^α определяется формулой $A^\alpha h = \int_{[a_0, \infty)} \mu^\alpha dE_\mu h$, а при $\alpha > 0$ $D(A^\alpha) = \left\{ h \in H: \int_{[a_0, \infty)} \mu^{2\alpha} d\|E_\mu h\|^2 < \infty \right\}$. Так как спектр отделён от нуля, отрицательные степени $A^{-\alpha}, \alpha > 0$, являются ограниченными операторами: $\|A^{-\alpha}\| \leq a_0^{-\alpha}$. Оператор $-A$ порождает сжимающую полугруппу e^{-xA} , а оператор $-A^{1/\gamma}$ порождает полугруппу $e^{-tA^{1/\gamma}}$. Для дальнейшего полезна оценка сглаживания: при $\sigma \geq 0, t > 0$

$$\left\| A^\sigma e^{-tA^{1/\gamma}} \right\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\mu \geq a_0} \mu^\sigma e^{-t\mu^{1/\gamma}} \leq C_{\sigma, \gamma} t^{-\gamma\sigma}, \quad (4.3.2)$$

где можно взять

$$C_{\sigma,\gamma} = \begin{cases} 1, & \sigma = 0 \\ (\gamma\sigma)^{\gamma\sigma} e^{-\gamma\sigma}, & \sigma > 0 \end{cases} \quad (4.3.3)$$

Оценка (4.3.2) показывает, что для всякого $g \in H$ функция $u_g(t) = e^{-tA^{1/\gamma}}g$ при каждом $t > 0$ принадлежит $D(A^\sigma)$ для всех $\sigma \geq 0$. В частности, $u_g(t) \in D(A)$, и выражение $Au_g(t)$ существует. Для функций со значениями в H преобразование Станковича понимается как интеграл Бохнера

$$B_{\gamma,\nu}u(x) = \int_0^\infty w_{\gamma,\nu}(x,t)u(t)dt. \quad (4.3.4)$$

Ниже используется следующий стандартный факт для замкнутых операторов.

Лемма 4.3.1. Пусть A - замкнутый оператор в H . Предположим, что $u(t) \in D(A)$ почти всюду и для фиксированного $x \geq 0$

$$\int_0^\infty |w_{\gamma,\nu}(x,t)|\|u(t)\|dt < \infty, \int_0^\infty |w_{\gamma,\nu}(x,t)|\|Au(t)\|dt < \infty, \quad (4.3.5)$$

тогда $B_{\gamma,\nu}u(x) \in D(A)$ и

$$AB_{\gamma,\nu}u(x) = B_{\gamma,\nu}(Au)(x). \quad (4.3.6)$$

Доказательство. Положим $y = \int_0^\infty w_{\gamma,\nu}(x,t)u(t)dt, z = \int_0^\infty w_{\gamma,\nu}(x,t)Au(t)dt$. Интегралы существуют в смысле Бохнера по условию (4.3.5). Аппроксимируя подынтегральные функции простыми функциями со значениями в $D(A)$, получаем последовательность $y_n \in D(A)$, для которой $y_n \rightarrow y$ и $Ay_n \rightarrow z$ в H . Поскольку A замкнут, $y \in D(A)$ и $Ay = z$. Это и есть (4.3.6). Таким образом, если u достаточно убывает при $t \rightarrow \infty$ и обладает достаточной регулярностью по оператору A , то преобразование Станковича переводит операторное уравнение

$$D_{\infty t}^\gamma u(t) - Au(t) = 0 \quad (4.3.7)$$

в задачу

$$V'(x) + AV(x) = 0, V(x) = B_{\gamma,\nu}u(x) \quad (4.3.8)$$

Действительно, по коммутационной формуле $B_{\gamma,\nu}D_{\infty t}^\gamma = -dB_{\gamma,\nu}/dx$, а по лемме выше $B_{\gamma,\nu}(Au) = AB_{\gamma,\nu}u$. Поэтому $-V'(x) - AV(x) = 0$ что эквивалентно (4.3.8). Сначала запишем решение через начальное значение исходной полугруппы.

Теорема 4.3.1. Пусть $0 < \gamma < 1, \nu > \gamma$, оператор A удовлетворяет (4.3.1). Тогда для любого $g \in H$ функция $u_g(t) = e^{-tA^{1/\gamma}}g, t > 0$ является сильным решением уравнения (4.3.7) при $t > 0$. Кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u_g(t) = g \text{ в } H \quad (4.3.9)$$

и

$$B_{\gamma, \nu} u_g(x) = e^{-xA} A^{-\nu/\gamma} g, x \geq 0. \quad (4.3.10)$$

Доказательство. По спектральной теореме $u_g(t) = \int_{[a_0, \infty)} e^{-t\mu^{1/\gamma}} dE_\mu g$. Для каждого фиксированного $t > 0$ функция $\mu e^{-t\mu^{1/\gamma}}$ ограничена на $[a_0, \infty)$. Поэтому $u_g(t) \in D(A)$, и $Au_g(t) = \int_{[a_0, \infty)} \mu e^{-t\mu^{1/\gamma}} dE_\mu g$

Используя равенство $D_{\infty t}^\gamma e^{-kt} = k^\gamma e^{-kt}, \operatorname{Re} k > 0$ при $k = \mu^{1/\gamma}$, получаем $D_{\infty t}^\gamma u_g(t) = \int_{[a_0, \infty)} \mu e^{-t\mu^{1/\gamma}} dE_\mu g = Au_g(t)$. Следовательно, $D_{\infty t}^\gamma u_g - Au_g = 0$. Сильная сходимость (4.3.9) следует из сильной непрерывности полугруппы $e^{-tA^{1/\gamma}}$ при $t = 0$. Теперь вычислим преобразование. По формуле действия преобразования Станковича на экспоненту $B_{\gamma, \nu}(e^{-ct})(x) = c^{-\nu} e^{-xc^\gamma}, \operatorname{Re} c > 0$ при $c = \mu^{1/\gamma}$ имеем $B_{\gamma, \nu}(e^{-t\mu^{1/\gamma}})(x) = \mu^{-\nu/\gamma} e^{-x\mu}$. Интегрирование по спектральной мере даёт $B_{\gamma, \nu} u_g(x) = \int_{[a_0, \infty)} \mu^{-\nu/\gamma} e^{-x\mu} dE_\mu g = e^{-xA} A^{-\nu/\gamma} g$. Абсолютная сходимость интеграла Бохнера при $x = 0$ следует из оценки $\int_0^\infty t^{\nu-1} \|e^{-tA^{1/\gamma}} g\| dt \leq \|g\| \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-ta_0^{1/\gamma}} dt < \infty$. При $x > 0$ сходимость тем более выполняется благодаря дополнительному убыванию ядра $w_{\gamma, \nu}(x, t)$ при $t \rightarrow 0+$.

Замечание 4.3.1. Условие $A \geq a_0 I, a_0 > 0$, существенно для данной формы записи. Оно исключает нулевую спектральную компоненту, гарантирует ограниченность $A^{-\nu/\gamma}$ и обеспечивает экспоненциальное убывание $e^{-tA^{1/\gamma}}$ при $t \rightarrow \infty$. Если $0 \in \operatorname{sp} A$, то нулевая мода должна рассматриваться отдельно; для правосторонней производной на полуоси $(0, \infty)$ это приводит к дополнительным условиям сходимости на бесконечности.

Из (4.3.10) видно, что $h = A^{-\nu/\gamma} g, g = A^{\nu/\gamma} h$. Поэтому для произвольного $h \in D(A^{\nu/\gamma})$ решение можно записать в виде $u_h(t) = A^{\nu/\gamma} e^{-tA^{1/\gamma}} h, t > 0$. Тогда $B_{\gamma, \nu} u_h(x) = e^{-xA} h, x \geq 0$. Именно эта форма используется в спектральных рядах ниже: коэффициенты h_n являются коэффициентами начального значения $V(0) = h$ для преобразованного уравнения $V' + AV = 0$, а не непосредственно коэффициентами $u(0+)$. Если нужно задать $u(0+) = g$, то следует брать $h = A^{-\nu/\gamma} g$. Пусть $V(x) = e^{-xA} h$. Тогда для $x > 0$, имеем $V'(x) + AV(x) = 0$.

Умножая это уравнение скалярно на $V(x)$, получаем энергетическое тождество $\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \|V(x)\|^2 + \|A^{1/2}V(x)\|^2 = 0$. Следовательно, $\|V(x)\| \leq e^{-a_0 x} \|h\|, x \geq 0$

Именно поэтому в правостороннем дробном уравнении положительный оператор должен входить со знаком минус: $D_{\infty t}^\gamma u - Au = 0$. После преобразования Станковича этот знак превращается в диссипативную задачу $V' + AV = 0$. Если бы вместо этого было записано $D_{\infty t}^\gamma u + Au = 0$, то после преобразования получилось бы $V' - AV = 0$, то есть растущая по x задача для положительного A . Если A имеет компактный резольвенту, то существует ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ из собственных функций: $A\varphi_n = \mu_n \varphi_n, 0 < a_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots, \mu_n \rightarrow \infty$. Если $h = \sum_{n=1}^\infty h_n \varphi_n, h_n = (h, \varphi_n)_H$, то условие $h \in D(A^{\nu/\gamma})$ эквивалентно $\sum_{n=1}^\infty |h_n|^2 \mu_n^{2\nu/\gamma} < \infty$. В этом случае $V(x) = e^{-xA} h = \sum_{n=1}^\infty h_n e^{-\mu_n x} \varphi_n$, а соответствующий прообраз по преобразованию Станковича равен

$$u(t) = A^{\nu/\gamma} e^{-tA^{1/\gamma}} h = \sum_{n=1}^\infty h_n \mu_n^{\nu/\gamma} e^{-\mu_n^{1/\gamma} t} \varphi_n. \quad (4.3.11)$$

Для каждого $r \geq 0$ и $t \geq \varepsilon > 0 \sum_{n=1}^\infty |h_n|^2 \mu_n^{2(\nu/\gamma+r)} e^{-2\varepsilon \mu_n^{1/\gamma}} < \infty$, поэтому $u(t) \in D(A^r)$ при всех $r \geq 0$. В частности, решение сглаживается по пространственной переменной мгновенно при $t > 0$.

Неоднородное операторное уравнение

Рассмотрим $D_{\infty t}^\gamma u(t) - Au(t) = f(t)$. Если преобразования $V(x) = B_{\gamma, \nu} u(x), F(x) = B_{\gamma, \nu} f(x)$ существуют и допустимы перестановки с A , то после преобразования получается

$$V'(x) + AV(x) = -F(x). \quad (4.3.12)$$

При условии $V(0) = h$ слабое решение этой задачи имеет вид

$$V(x) = e^{-xA} h - \int_0^x e^{-(x-s)A} F(s) ds. \quad (4.3.13)$$

Если $h \in D(A), F$ локально непрерывна и принимает значения в $D(A)$ с достаточной интегрируемостью, то (4.3.13) является классическим решением (4.3.12).

В частном случае $f(t) = e^{-at} g, \operatorname{Re} a > 0$, частное решение ищется в виде $u_p(t) = e^{-at} q$. Подстановка даёт $(a^\gamma I - A)q = g$. Если $a^\gamma \in \rho(A)$, то $u_p(t) = e^{-at} (a^\gamma I - A)^{-1} g$.

Если же $a^\gamma \in \operatorname{sp} A$: оператор $a^\gamma I - A$ не имеет ограниченного обратного, и разрешимость зависит от спектрального положения g . Для дискретного

спектра это означает, что компоненты g вдоль собственных подпространств с $\mu_n = a^\gamma$ должны рассматриваться отдельно.

Теперь конкретизируем операторную схему для оператора четвёртого порядка. Пусть $H = L_2(0, l)$, $L = -\frac{d^2}{dy^2}$, $D(L) = H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)$. Тогда L - положительный самосопряжённый оператор, причём $L\varphi_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \varphi_n$, $\varphi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi y}{l}$. Оператор четвёртого порядка с условиями Навье естественно определяется как квадрат оператора Дирихле $A_4 = L^2$. Его область определения равна $D(A_4) = \{v \in H^4(0, l) : v(0) = v(l) = 0, v''(0) = v''(l) = 0\}$ и на этой области $A_4 v = v^{(4)}$. Действительно, $v \in D(L^2)$ означает, что $v \in D(L)$ и $Lv = -v'' \in D(L)$. Отсюда следуют условия $v(0) = v(l) = 0$ и $v''(0) = v''(l) = 0$, а также $v \in H^4(0, l)$. Обратное включение проверяется непосредственно. Поскольку $A_4 = L^2$, оператор A_4 самосопряжён и положителен. Более того, $(A_4 v, v)_{L_2(0, l)} = \|Lv\|_{L_2(0, l)}^2 = \int_0^l |v''(y)|^2 dy \geq 0$, а $A_4^{1/2} = L$. Собственные значения и собственные функции имеют вид $\mu_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4$, $\varphi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi y}{l}$, $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, $A_4 \geq \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 I$. Для этого оператора правосторонняя дробная задача $D_{\infty t}^\gamma u(t) - A_4 u(t) = 0$ в координатной записи имеет вид $D_{\infty t}^\gamma u(t, y) - u_{yyyy}(t, y) = 0$, $0 < y < l$ с граничными условиями $u(t, 0) = u(t, l) = 0$, $u_{yy}(t, 0) = u_{yy}(t, l) = 0$.

После преобразования Станковича получается $V_x(x, y) + V_{yyyy}(x, y) = 0$, $0 < y < l$, с теми же условиями Навье по переменной y . Энергетическое тождество для преобразованной задачи принимает вид $\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \|V(x, \cdot)\|_{L_2(0, l)}^2 + \|V_{yy}(x, \cdot)\|_{L_2(0, l)}^2 = 0$. Данное тождество является простой проверкой правильности знака: уравнение $V_x + V_{yyyy} = 0$ диссипативно, а уравнение $V_x - V_{yyyy} = 0$ для положительного A_4 было бы антидиссипативным. Если $h(y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \varphi_n(y)$, $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n|^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^{8\gamma/\gamma} < \infty$, то $V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 x\right\} \varphi_n(y)$, а прообраз равен $u(t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \left(\frac{n\pi}{l}\right)^{4\gamma/\gamma} \exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{4/\gamma} t\right\} \varphi_n(y)$. Данная формула совпадает с общей спектральной формулой (4.3.11) при $\mu_n = (n\pi/l)^4$.

Операторы высокого чётного порядка

Та же конструкция работает для любого чётного порядка. Если $A_m = L^m = \left(-\frac{d^2}{dy^2}\right)^m$, $m \in \mathbb{N}$, то на гладких функциях $A_m = (-1)^m \frac{d^{2m}}{dy^{2m}}$. При этом $\mu_n^{(m)} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2m}$, $\varphi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi y}{l}$. Если функция достаточно гладкая, условия из

$D(L^m)$ записываются как условия Навье высокого порядка: $v^{(2j)}(0) = v^{(2j)}(l) = 0, j = 0, 1, \dots, m - 1$. Правосторонняя дробная задача принимает вид $D_{\infty t}^Y u - A_m u = 0$, то есть $D_{\infty t}^Y u - (-1)^m \frac{\partial^{2m} u}{\partial y^{2m}} = 0$. После преобразования Станковича получается классическая параболическая задача $V_x + A_m V = 0$, то есть $V_x + (-1)^m \frac{\partial^{2m} V}{\partial y^{2m}} = 0$. Именно оператор $A_m = (-1)^m \partial_y^{2m}$ является положительным пространственным оператором. Поэтому для $m = 2$ знак перед ∂_y^4 в преобразованной задаче положительный, а в исходной правосторонней задаче он стоит со знаком минус.

Теперь рассмотрим пример дробно-параболическим уравнениям четвёртого порядка [73]. Пусть

$$H = L_2(0, l), A = \frac{d^4}{dy^4}, \quad (4.3.14)$$

$$D(A) = \{v \in H^4(0, l): v(0) = v(l) = v''(0) = v''(l) = 0\}. \quad (4.3.15)$$

Условия $v(0) = v(l) = 0, v''(0) = v''(l) = 0$ называются условиями Навье.

Лемма 4.3.2. Оператор A , заданный формулами (4.3.14), (4.3.1), является положительным самосопряжённым оператором в $L_2(0, l)$. Его собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4, \varphi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi y}{l}, n = 1, 2, \dots \quad (4.3.16)$$

Доказательство. Для $v \in D(A)$ интегрирование по частям даёт

$$\begin{aligned} (Av, v)_{L_2(0, l)} &= \int_0^l v''''(y) \overline{v(y)} dy \\ &= [v''''(y) \overline{v(y)}]_0^l - [v''(y) \overline{v'(y)}]_0^l + \int_0^l |v''(y)|^2 dy \\ &= \int_0^l |v''(y)|^2 dy \geq 0 \end{aligned}$$

Граничные слагаемые обращаются в нуль в силу условий $v(0) = v(l) = v''(0) = v''(l) = 0$. Самосопряжённость следует из той же формулы Грина и симметричности условий Навье.

Для функций φ_n имеем $\varphi_n''''(y) = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \varphi_n(y)$, а также $\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0, \varphi_n''(0) = \varphi_n''(l) = 0$. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной ортонормированной системой в $L_2(0, l)$. Поэтому спектр задан формулой (4.3.16). Рассмотрим задачу

$$D_{\infty t}^{\gamma} u(t, y) - u_{yyyy}(t, y) = 0, 0 < y < l, t > 0, \quad (4.3.17)$$

$$u(t, 0) = u(t, l) = 0, u_{yy}(t, 0) = u_{yy}(t, l) = 0. \quad (4.3.18)$$

Так как $A = d^4/dy^4$, уравнение (4.3.17) является частным случаем правосторонней операторной задачи $D_{\infty t}^{\gamma} u(t) - Au(t) = 0$. Пусть $V(x, y) = B_{\gamma, \nu} u(\cdot, y)(x)$. Тогда из (4.1.8) получаем $-V_x(x, y) - V_{yyyy}(x, y) = 0$. Следовательно, преобразованная задача имеет вид $V_x(x, y) + V_{yyyy}(x, y) = 0, 0 < y < l, x > 0, V(x, 0) = V(x, l) = 0, V_{yy}(x, 0) = V_{yy}(x, l) = 0$. Это классическое параболическое уравнение четвертого порядка с оператором $A = d^4/dy^4$ и эволюционной переменной $x, V_x + AV = 0$. Если $h(y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \varphi_n(y)$, то решение преобразованной задачи с условием $V(0, y) = h(y)$ равно

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n e^{-\mu_n x} \varphi_n(y). \quad (4.3.19)$$

Соответствующий прообраз по преобразованию Станковича равен

$$u(t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \mu_n^{\frac{\nu}{\gamma}} e^{-\mu_n^{\frac{1}{\gamma}} t} \varphi_n(y). \quad (4.3.20)$$

В развёрнутом виде $u(t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \left(\frac{n\pi}{l}\right)^{4\nu/\gamma} \exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{4/\gamma} t\right\} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi y}{l}$.

Теорема 4.3.2. Пусть $0 < \gamma < 1, \nu > \gamma$, и $h \in D(A^{\nu/\gamma})$, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n|^2 \mu_n^{2\nu/\gamma} < \infty$. Тогда ряд (4.3.20) задаёт решение задачи (4.3.17), (4.3.18) при $t > 0$. Его преобразование Станковича равно (4.3.19). Более того, на каждом промежутке $t \geq \varepsilon > 0$ ряд (4.3.20), а также ряды, получающиеся после применения операторов $D_{\infty t}^{\gamma}, \partial^2/\partial y^2$ и $\partial^4/\partial y^4$, сходятся равномерно по $y \in [0, l]$.

Доказательство. Для каждого n имеем $D_{\infty t}^{\gamma} e^{-\mu_n^{1/\gamma} t} = \mu_n e^{-\mu_n^{1/\gamma} t}, \varphi_n''''(y) = \mu_n \varphi_n(y)$. Поэтому каждое слагаемое ряда (4.3.20) удовлетворяет уравнению (4.3.17). Кроме того, $\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0, \varphi_n''(0) = \varphi_n''(l) = 0$, поэтому граничные условия (4.3.18) выполняются почленно. Для $t \geq \varepsilon > 0$ и фиксированного $r \geq 0$ справедлива оценка $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n| \mu_n^{\nu/\gamma+r} e^{-\varepsilon \mu_n^{1/\gamma}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |h_n|^2 \mu_n^{2\nu/\gamma}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{2r} e^{-2\varepsilon \mu_n^{1/\gamma}}\right)^{1/2}$. Второй ряд сходится. При $r = 0$ получаем равномерную сходимость ряда для u , при $r = 1/2$ - ряда для u_{yy} , поскольку $\varphi_n'' = -(n\pi/l)^2 \varphi_n = -\mu_n^{1/2} \varphi_n$, а при $r = 1$ - рядов для $D_{\infty t}^{\gamma} u$ и u_{yyyy} .

Наконец, по формуле (4.1.3) $B_{\gamma, \nu}(\mu_n^{\nu/\gamma} e^{-\mu_n^{1/\gamma} t})(x) = e^{-\mu_n x}$. Отсюда следует (4.3.19).

Обобщение на высокий чётный порядок

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и A_m - положительная реализация оператора $A_m = (-1)^m \frac{d^{2m}}{dy^{2m}}$ на отрезке $(0, l)$ с условиями типа Навье $v^{(2j)}(0) = v^{(2j)}(l) = 0, j = 0, 1, \dots, m - 1$. Данный оператор можно рассматривать как степень $(-d^2/dy^2)^m$ оператора Дирихле. Поэтому его собственные функции остаются синусами, а собственные значения равны $\mu_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2m}$, $\varphi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi y}{l}$. Правосторонняя дробная задача имеет вид $D_{\infty t}^{\nu} u(t, y) - (-1)^m \frac{\partial^{2m} u(t, y)}{\partial y^{2m}} = 0$. После преобразования Станковича она переходит в $V_x(x, y) + (-1)^m \frac{\partial^{2m} V(x, y)}{\partial y^{2m}} = 0$. Если $h = \sum h_n \varphi_n$, то $V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n e^{-\mu_n x} \varphi_n(y)$, а прообраз по Станковичу равен $u(t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \mu_n^{\nu/\gamma} e^{-\mu_n^{1/\gamma} t} \varphi_n(y)$. При $m = 1$ получается пример второго порядка, а при $m = 2$ - пример четвёртого порядка, рассмотренный выше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе проведено комплексное исследование краевых задач для дробно-диффузионных и диффузионно-волновых уравнений в неканонических областях. Основное внимание уделено построению фундаментальных решений и функций Грина для дробных операторов, разработке соответствующих дробных потенциалов, получению явных интегральных представлений решений и исследованию разрешимости возникающих интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Цель диссертационной работы, состоявшая в развитии аналитических методов исследования дробно-диффузионных и диффузионно-волновых уравнений в вырождающихся областях с подвижными, сужающимися, расширяющимися границами, достигнута. Поставленные в работе задачи решены.

В ходе исследования получены следующие основные результаты.

1. Сформирован и систематизирован вспомогательный аналитический аппарат, необходимый для исследования рассматриваемых задач. Уточнены свойства обобщённых функций и специальных функций, прежде всего функций Миттаг–Леффлера и Райта, а также дробных интегралов и производных Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто. Установлены вспомогательные утверждения, используемые при построении функций Грина, потенциалов и интегральных представлений решений.

2. Для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с правосторонней дробной производной Лиувилля получено интегральное представление решения методом функции Грина. Доказаны результаты о существовании и единственности регулярного решения. Тем самым построен базовый одномерный аппарат, лежащий в основе последующего рассмотрения более сложных краевых задач.

3. Построены фундаментальные решения и функции Грина для дробных операторов Римана–Лиувилля в модельных областях. Получены явные представления соответствующих ядер, выражающиеся через функцию Райта. Установлены интегральные формулы решений краевых задач в областях, допускающих приведение к каноническому виду заменой переменных. Эти результаты составляют основу метода функций Грина для дальнейшего исследования задач в неканонических областях.

4. Исследована краевая задача для уравнения дробной диффузии с бесконечной памятью в сужающейся нецилиндрической области. Для данной задачи построены дробные: объёмный потенциал и потенциалы простого и двойного слоя, удовлетворяющие соответствующим граничным условиям. Получено интегральное представление регулярного решения, а исходная задача сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно неизвестной граничной плотности. Доказаны существование и единственность регулярного решения.

5. Исследована задача Дирихле для дробного диффузионного уравнения с правосторонней производной Лиувилля в вырождающейся угловой области. Получено представление решения через специальные дробные потенциалы, установлена формула скачка потенциала двойного слоя, а исходная задача сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Доказана однозначная разрешимость этого уравнения и обоснована возможность нахождения решения методом последовательных приближений.

6. Для диффузионно-волновой краевой задачи в области с подвижной диагональной границей разработан весовой функциональный подход. Установлены условия на параметры весов, обеспечивающие существование постановки задачи, доказан дробно-параболический характер рассматриваемого уравнения, получены необходимые вложения и априорные оценки. Построена функция Грина исследуемой задачи, введён диагональный потенциал и доказаны теоремы существования и единственности классических и обобщённых решений.

7. Исследованы интегральные преобразования с ядром Райта для уравнений с правосторонним оператором Римана–Лиувилля. Получены коммутационные формулы для преобразования Станковича и дробного оператора, выведены представления решений соответствующего уравнения и установлен секторный критерий существования экспоненциальных решений. Эти результаты дополняют построенный в работе аналитический аппарат и показывают естественную связь между дробными операторами и интегральными преобразованиями с ядром Райта.

Полученные результаты имеют теоретическое значение для дальнейшего развития теории дробных дифференциальных уравнений, теории функций Грина и интегральных уравнений Вольтерра. В работе показано, что метод потенциалов и функций Грина может быть последовательно распространён на уравнения с дробными производными по времени и в области сложной геометрии, в том числе в вырождающейся области с подвижной границей. Существенным итогом исследования является установление точной связи между краевыми задачами для дробных уравнений и интегральными уравнениями Вольтерра второго рода, что позволяет применять единый аналитический подход к широкому классу задач.

Практическая значимость результатов состоит в том, что построенные функции Грина, интегральные представления решений, формулы для потенциалов и условия разрешимости могут быть использованы при дальнейшем исследовании прямых и обратных задач для дробных уравнений, при разработке приближённых и вычислительных методов, а также при математическом моделировании процессов аномальной диффузии и переноса в средах со сложной геометрией.

В диссертации разработан целостный аналитический подход к исследованию дробно-диффузионных и диффузионно-волновых уравнений в неканонических областях. Полученные результаты расширяют существующие представления о краевых задачах для уравнений с дробными производными,

развивают метод функций Грина для областей переменной геометрии и создают основу для дальнейших исследований в теории дробных уравнений математической физики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Gevrey M. Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 1913. Série 6. T. 9. P. 305–471.
- 2 Friedman A. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.
- 3 Crank J. *Free and Moving Boundary Problems*. Oxford: Clarendon Press, 1984.
- 4 Cannon J.R. *The One-Dimensional Heat Equation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.
- 5 Hardy G.H., Titchmarsh E.C. An integral equation // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1932. Vol. 28, No. 2. P. 165–173.
- 6 Tricomi F.G. *Integral Equations*. New York: Interscience, 1957.
- 7 Gripenberg G., Londen S.-O., Staffans O. *Volterra Integral and Functional Equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- 8 Burton T.A. *Volterra Integral and Differential Equations*. 2nd ed. Amsterdam: Elsevier, 2005.
- 9 Асхабов С. Н. Интегральное уравнение Вольтерра со степенной нелинейностью // *Чебышевский сборник*. 2022. Т. 23, № 5. С. 6–19. DOI: 10.22405/2226-8383-2022-23-5-6-19..
- 10 Герасимов А.Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // *Прикладная математика и механика*. 1948. Т. 12, вып. 3. С. 251–260.
- 11 Caputo M. Linear Models of Dissipation whose Q is almost Frequency Independent—II // *Geophysical Journal International*. 1967. Vol. 13, No. 5. P. 529–539.
- 12 Джрбашян М.М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*. М.: Наука, 1966.
- 13 Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Yverdon: Gordon and Breach, 1993.
- 14 Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. San Diego: Academic Press, 1999.
- 15 Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- 16 Diethelm K. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010.
- 17 Hilfer R., ed. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Singapore: World Scientific, 2000.
- 18 Nigmatullin R.R. The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry // *Physica Status Solidi (b)*. 1986. Vol. 133, No. 1. P. 425–430.
- 19 Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Physics Reports*. 2000. Vol. 339, No. 1. P. 1–77.

- 20 Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 2004. Vol. 37. P. R161–R208.
- 21 Wright E.M. On the Coefficients of Power Series Having Exponential Singularities // *Journal of the London Mathematical Society*. 1933. Vol. 8, No. 1. P. 71–79.
- 22 Wright E.M. The Asymptotic Expansion of the Generalized Bessel Function // *Proceedings of the London Mathematical Society*. Series 2. 1935. Vol. 38, No. 1. P. 257–270.
- 23 Wright E.M. The Asymptotic Expansion of the Generalized Hypergeometric Function // *Journal of the London Mathematical Society*. 1935. Vol. 10, No. 4. P. 286–293.
- 24 Wright E.M. The Asymptotic Expansion of the Generalized Hypergeometric Function // *Proceedings of the London Mathematical Society*. Series 2. 1940. Vol. 46, No. 1. P. 389–408.
- 25 Wright E.M. The generalized Bessel function of order greater than one // *Quarterly Journal of Mathematics*. 1940. Vol. 11, No. 1. P. 36–48.
- 26 Gorenflo R., Luchko Y., Mainardi F. Analytical properties and applications of the Wright function // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 1999. Vol. 2, No. 4. P. 383–414.
- 27 Gorenflo R., Luchko Y., Mainardi F. Wright functions as scale-invariant solutions of the diffusion-wave equation // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2000. Vol. 118, No. 1–2. P. 175–191.
- 28 Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // *Applied Mathematics Letters*. 1996. Vol. 9, No. 6. P. 23–28.
- 29 Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. London; Singapore: Imperial College Press; World Scientific, 2010.
- 30 Wyss W. The fractional diffusion equation // *Journal of Mathematical Physics*. 1986. Vol. 27, No. 11. P. 2782–2785.
- 31 Schneider W.R., Wyss W. Fractional diffusion and wave equations // *Journal of Mathematical Physics*. 1989. Vol. 30, No. 1. P. 134–144.
- 32 Kochubei A.N. A Cauchy problem for evolution equations of fractional order // *Differential Equations*. 1989. Vol. 25, No. 8. P. 967–974.
- 33 Kochubei A.N. Fractional-order diffusion // *Differential Equations*. 1990. Vol. 26. P. 485–492.
- 34 Eidelman S.D., Kochubei A.N. Cauchy problem for fractional diffusion equations // *Journal of Differential Equations*. 2004. Vol. 199, No. 2. P. 211–255.
- 35 Agrawal O.P. Solution for a Fractional Diffusion-Wave Equation Defined in a Bounded Domain // *Nonlinear Dynamics*. 2002. Vol. 29. P. 145–155.
- 36 Luchko Y. Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2009. Vol. 351, No. 1. P. 218–223.
- 37 Sakamoto K., Yamamoto M. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems //

Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2011. Vol. 382, No. 1. P. 426–447.

38 Luchko Y. Initial-boundary-value problems for the one-dimensional time-fractional diffusion equation // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2012. Vol. 15, No. 1. P. 141–160.

39 Псху А.В. Краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*. 2002. № 1(8). С. 76–78.

40 Псху А.В. Решение краевой задачи для уравнения с частными производными дробного порядка // *Дифференциальные уравнения*. 2003. Т. 39, № 8. С. 1092–1099.

41 Псху А.В. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // *Дифференциальные уравнения*. 2003. Т. 39, № 9. С. 1286–1289.

42 Псху А.В. Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина // *Дифференциальные уравнения*. 2003. Т. 39, № 10. С. 1430–1433.

43 Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.

44 Псху А.В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // *Известия РАН. Серия математическая*. 2009. Т. 73, № 2. С. 141–182.

45 Псху А.В. Первая краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения в нецилиндрической области // *Известия РАН. Серия математическая*. 2017. Т. 81, № 6. С. 158–179.

46 Pskhu A.V. Green Functions of the First Boundary-Value Problem for a Fractional Diffusion-Wave Equation in Multidimensional Domains // *Mathematics*. 2020. Vol. 8, No. 4. Art. 464.

47 Федоров В. Е., Гордиевских Д. М. Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2015. № 1. С. 71–83.

48 Pskhu A.V., Ramazanov M.I., Gulmanov N.K., Iskakov S.A. Boundary value problem for fractional diffusion equation in a curvilinear angle domain // *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2022. No. 1(105). P. 83–95.

49 Ramazanov M.I., Pskhu A.V., Omarov M.T. The first boundary value problem for the fractional diffusion equation in a degenerate angular domain // *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2024. No. 1(113). P. 162–173.

50 Ramazanov M.I., Gulmanov N.K., Kopbalina S.S., Omarov M.T. Solution of a Singular Integral Equation of Volterra Type of the Second Kind // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024. Vol. 45, P. 5898–5906.

51 Ramazanov M.I., Gulmanov N.K., Omarov M.T. On Solving a Singular Volterra Integral Equation. *Filomat* 39:11 (2025), 3647–3656. <https://doi.org/10.2298/FIL2511647R>

- 52 A.D. Akhmetshin, M.T. Omarov, R.Z. Toleukhanova. A Boundary Value Problem for a Time-Fractional Diffusion Equation in a Non-Cylindrical Shrinking Domain. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, No. 1(121), 2026, pp. 37–54. <https://doi.org/10.31489/2026M1/37-54>.
- 53 M. T. Omarov, M. I. Ramazanov. Boundary Value Problem for the Fractional Diffusion Equation with the Right-Sided Liouville Operator in a Triangular Domain. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2026, Vol. 47, No. 2, pp. 625–635
- 54 Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Вып. 1. М.: Физматгиз, 1958.
- 55 Mittag-Leffler G. M. Une generalisation de l'integrale de Laplace–Abel // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*. 1903. Vol. 137. P. 537–539.
- 56 Mittag-Leffler G. M. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$ // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*. 1903. Vol. 137. P. 554–558.
- 57 Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. 2nd ed. Berlin: Springer, 2020.
- 58 Pollard H. The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function $E_\alpha(-x)$ // *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1948. Vol. 54, no. 12. P. 1115–1116.
- 59 Mainardi F., Gorenflo R. On Mittag-Leffler-type functions in fractional evolution processes // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2000. Vol. 118, iss. 1–2. P. 283–299.
- 60 Wright E. M. The Asymptotic Expansion of Integral Functions Defined by Taylor Series // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*. 1940. Vol. 238, no. 795. P. 423–451.
- 61 Mainardi F., Pagnini G. The Wright functions as solutions of the time-fractional diffusion equation // *Applied Mathematics and Computation*. 2003. Vol. 141, iss. 1. P. 51–62.
- 62 Mainardi F., Mura A., Pagnini G. The M-Wright function in time-fractional diffusion processes: a tutorial survey // *International Journal of Differential Equations*. 2010. Article ID 104505.
- 63 Luchko Y. The Wright function and its applications // *Handbook of Fractional Calculus with Applications*. Vol. 1: *Basic Theory* / ed. by A. Kochubei, Y. Luchko. Berlin; Boston: De Gruyter, 2019. P. 241–268.
- 64 Sneddon I. N. The Use of Integral Transforms. New York: McGraw-Hill, 1972.
- 65 Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965.
- 66 Краснов М. Л. Интегральные уравнения: Введение в теорию. М.: Наука, 1975.
- 67 Lakshmikantham V., Vatsala A.S. Theory of fractional differential inequalities and applications // *Communications in Applied Analysis*. – 2007. – Vol. 11. – P. 395–402.

- 68 Webb J.R.L. A fractional Gronwall inequality and the asymptotic behaviour of global solutions of Caputo fractional problems // *Electronic Journal of Differential Equations*. – 2021. – Vol. 2021, No. 80. – P. 1–22.
- 69 Diethelm K., Ford N.J., Freed A.D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations // *Nonlinear Dynamics*. – 2002. – Vol. 29. – P. 3–22.
- 70 Povstenko Y. *Fractional Thermoelasticity*. Cham: Springer, 2015.
- 71 Povstenko Y. *Linear Fractional Diffusion-Wave Equation for Scientists and Engineers*. Cham: Birkhäuser, 2015.
- 72 Stanković B., O jednoj klasi singularnih integralnih jednačina (on a class of singular integral equations), *Zbornik Radova SAN*, 43(4) (1955), 81-130 (Serbian).
- 73 Карашева Л.Л. Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временной переменной // *Сибирские электронные математические известия*. – 2018. – Т. 15. – С. 696–706. – DOI: 10.17377/semi.2018.15.055.